Devoir libre $n°03$
Correction

*N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.*

•••••••••••

# Exercice I

**1.** Vérifions les trois propriétés de la définition d'une norme :
• Si $\|P\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)| = 0$, alors $\forall x \in [0,1]$, $P(x) = 0$ donc $P$ admet une infinité de racines, et donc $P$ est le polynôme nul.
• On a toujours, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |\lambda P(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

et donc $\|\lambda P\|_\infty = |\lambda|\|P\|$.
• Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty.$$

En passant à la borne supérieure, on obtient que

$$\|P + Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty.$$

En conclusion, $\|.\|_\infty$ définit une norme sur $E = \mathbb{R}[X]$.

**2.** Montrons l'existence :

$$\begin{aligned}
e^{inx} &= (e^{ix})^n = (\cos(x) + i\sin(x))^n && (1)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k \cos(x)^{n-k}(i\sin(x))^k && (2)\\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n} \complement_n^{2k} \cos(x)^{n-2k}(i\sin(x))^{2k} && (3)\\
&\quad + \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \complement_n^{2k+1} \cos(x)^{n-(2k+1)}(i\sin(x))^{2k+1} && (4)\\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n} \complement_n^{2k} \cos(x)^{n-2k}(-1)^k(\sin(x))^{2k} && (5)\\
&\quad +i \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \complement_n^{2k+1} \cos(x)^{n-(2k+1)}(-1)^k(\sin(x))^{2k+1} && (6)
\end{aligned}$$

On a ainsi, en identifiant les parties réelles,

$$\cos(nx) = \sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k \complement_n^{2k} \cos(x)^{n-2k}(1-\cos^2(x))^k,$$

qui est bien un polynôme en $\cos(x)$. Donc le polynôme $T_n = \sum\limits_{0\leq 2k\leq n} \complement_n^{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k$ répond bien à la question.
Passons maintenant à l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes $P$ et $Q$ vérifiant la propriété, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(\cos(x)) = \cos(nx) = Q(\cos(x)).$$

Comme la fonction $\cos$ est surjective, dans $[-1,1]$, on a alors $\forall t \in [-1,1]$, $P(t) = Q(t)$. En effet, on peut trouver $x$ tel que $t = \cos(x)$, donc $\forall t \in [-1,1]$, $P(t) - Q(t) = 0$. Le polynôme $P - Q$ est donc nul sur $[-1,1]$. Il a donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Et donc $P - Q = 0$ ce qui signifie que $P = Q$.
On a $T_n(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \complement_n^{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k$. Il est clair à partir de cette relation que $\deg(T_n) \leq n$.

Dans la relation précédente, cherchons le coefficient $a_n$ de $X^n$, il est donné par $a_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \complement_n^{2k}$. Comme on a :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k \text{ et } 0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \complement_n^k.$$

On demi-somme, (on garde donc que les termes pairs), on obtient :

$$a_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \complement_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

**3.** Prenons pour $x$ les $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Si on pose $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$, on a alors

$$T_n(x_k) = T_n\left(\cos\left(\theta_k\right)\right) = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 0$$

Les $x_k$ sont bien tous distincts car $0 \leq \theta_k \leq \pi$ et la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$. On a donc trouvé $n$ racines qui sont les $x_k$ pour $k$ compris entre $0$ et $n-1$. Voici donc les $n$ racines de ce polynôme, on les a donc bien toutes.

**4.** Pour tout réel $x$, on a $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. En dérivant cette relation, pour tout réel $x$. On obtient

$$-\sin(x) T_n'(\cos(x)) = -n \sin(nx),$$

Ainsi $T_n'(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = 0$ pour $\sin(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin \pi\mathbb{Z}$. On aura donc $T'(\cos(x)) = 0$ pour $\sin(nx) = 0$ et $x \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $x = \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$.
Les $k-1$ nombres $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in [\![1, n-1]\!]$ sont donc des racines de $T_n'$. Comme ils sont distincts et que $\deg(T_n') = n-1$, ce sont exactement les racines de $T_n'$.
Les seuls points de l'intervalle $[-1,1]$ où $T_n$ peut atteindre un extremum sont les bornes de cet intervalles, et les points intérieurs où $T_n'$ s'annule. Il s'agit donc de $\pm 1$ et les racines de $T_n'$, donc des points $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in [\![1, n]\!]$.
Réciproquement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a $\left|T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right| = 1$. De plus $\forall x \in [-1,1]$, on a $|T_n(x)| \leq 1$ puisque $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. D'où :

$$\{\, x \in [-1,1] \mid \ |T_n(x)| = \|T_n\|_\infty \,\} = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \,\middle|\, k \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

**5.** Par l'absurde, supposons $\|P\| < \frac{1}{2^{n-1}}$ et considérons

$$Q = P - \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

Le polynôme $Q$ est de degré strictement inférieur à $n$ et prend exactement le signe de $(-1)^k$ en les $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ puisque

$$Q(x_{2k}) = P(x_{2k}) - \frac{1}{2^{n-1}} < 0 \text{ et } Q(x_{2k+1}) = P(x_{2k+1}) + \frac{1}{2^{n-1}} > 0.$$

Par l'application du théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme $Q$ s'annule sur les intervalles $]x_n, x_{n-1}[, ..., ]x_1$
c'est le polynôme nul ce qui est absurde.

**6.** L'implication indirecte est évidente puisque $\|T_n\|_\infty = 1$.
Inversement, supposons, $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Considérons de nouveau le polynôme $Q$. Au sens large, il prend le signe de $(-1)^k$ en les $x_k$ puisque

$$Q(x_{2k}) = P(x_{2k}) - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 0 \text{ et } Q(x_{2k+1}) = P(x_{2k+1}) + \frac{1}{2^{n-1}} \geq 0,$$

et on peut assurer l'existence d'au moins une racine dans chaque intervalle $[x_n, x_{n-1}], ..., [x_1, x_0]$.
• Lorsque cela est possible, on choisit cette racine dans l'intervalle ouvert et on note $\alpha_n \leq ... \leq \alpha_1$ les $n$ racines ainsi obtenues. Si celles-ci sont distinctes, le polynôme $Q$ est nul et on conclut.
• Sinon, il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $Q(x_k) = 0$, alors $P(x_k) = \pm\dfrac{T_n(x_k)}{2^{n-1}}$, donc $P$ atteint un extremum en $x_k \in ]-1, 1[$, par suite $P'(x_k) = 0$ et puisque on aussi $T_n'(x_k) = 0$, on aura bien $Q'(x_k) = 0$ et donc $x_k$ est une racine double de $Q$. Le polynôme $Q$ admet alors au moins $n$ racines comptées avec multiplicité et on conclut.

## Exercice II

**1.** Il est clair que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $\mathbb{Z}\alpha$ est discret. En effet pour $\alpha = 0$ c'est clair et pour $\alpha \neq 0$ tout intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $p$ vérifiant $a \leq p\alpha \leq b$.
Réciproquement, si $H$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel $a$ dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ $(0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H)$ et $]0, a] \cap H$ est fini non vide, il admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$.
De $\alpha \in H$ on déduit que $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. De plus, pour tout $x \in H$ il existe un entier relatif $k$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ $(k = E\left(\dfrac{x}{\alpha}\right))$ et avec $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}^+$ on déduit du caractère minimal de $\alpha$ que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. On a donc en définitive $H = \mathbb{Z}\alpha$.

**2.** Si $H$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit $\{0\}$ alors $K = H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \varnothing$ et cet ensemble est minoré par $0$, il admet donc une borne inférieure $\alpha$. On distingue deux cas :
• Si $\alpha > 0$ alors $\alpha \in K$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in K$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on suppose que $\alpha \notin H$). Pour la même raison, on peut trouver $y \in K$ tel que $\alpha < y < x$. On a alors $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure $\alpha$.
On a $H = \mathbb{Z}\alpha$, en effet, $\mathbb{Z}\alpha \subset H$ du fait que $\alpha$ appartient au groupe $H$ et pour tout $x$ dans $H$, il existe $k$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que $H \subset \mathbb{Z}\alpha$.
D'où $H = \mathbb{Z}\alpha$.
• Si $\alpha = 0$, alors $H$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe $z$ dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \dfrac{y}{z} - \dfrac{x}{z}$ et pour $n \in \left[\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right] \cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in H$.

**3.** Si $G$ est discret, alors $G = \mathbb{Z}\alpha$ et donc il existe $p$ et $q$ non nuls dans $\mathbb{Z}$ tels que $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ ( $a$ et $b$ sont dans $G$ ) et en conséquence $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
Réciproquement, supposons $\dfrac{a}{b}$ rationnel, on peut écrire $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ entiers premiers entre eux et on a :

$$G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right)b = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q)\frac{b}{q}.$$

Le théorème de Bezout nous dit que $\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}$ et donc $G = \mathbb{Z}\dfrac{b}{q}$, c'est-à-dire que $G$ est discret.

**4.** (a) Comme $2\pi$ est irrationnel, le groupe $H = \mathbb{Z}2\pi + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Avec la $2\pi$-périodicité, la continuité et la surjectivité de l'application $f : x \mapsto e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ sur $\Gamma$, on déduit alors que l'ensemble :

$$f(H) = \left\{ e^{(2\pi m + n)i} \;\middle|\; (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\} = \left\{ e^{in} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est dense dans $[-1, 1]$.

(b) Avec la continuité et la surjectivité de l'application $p : z \mapsto \Re(z)$ de $\Gamma$ sur $[-1, 1]$, on déduit que l'ensemble $\{ \cos(n) \mid n \in \mathbb{Z} \}$ est dense dans $[-1, 1]$, puis par parité que l'ensemble $\{ \cos(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ est dense dans $[-1, 1]$.

# Exercice 3

**1.** Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f : t \mapsto t^{\frac{1}{\alpha}}$ sur $[\theta + 2n\pi, \theta + 2(n+1)\pi]$. En effet, il existe $\xi_n \in ]\theta + 2n\pi, \theta + 2(n+1)\pi[$ tel que

$$(\theta + 2(n+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}} - (\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}} = 2\pi f'(\xi_n) = 2\pi \frac{1}{\alpha} \xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Et comme $0 < \alpha < 1$, $\xi_n > 1$, on a $\dfrac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1$ et $(\theta + 2(n+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}} - (\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}} > 2\pi > 1$ de sorte que $\varphi(n+1) = E((\theta + 2(n+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}) > E((\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}) = \varphi(n)$ [1].

**2.** On sait que $\varphi(n) \leq (\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \varphi(n) + 1$, d'où :

$$0 \leq \theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha < (\varphi(n) + 1)^\alpha - \varphi(n)^\alpha$$

et comme $\lim\limits_{p \to +\infty} ((p+1)^\alpha - p^\alpha) = 0$ [2], alors $\lim\limits_{n \to \infty} (\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha) = 0$.

**3.** Pour $n \geq 1$ on a, en utilisant le fait que la fonction $\cos$ est 1-lipschitzienne :

$$|u_{\varphi(n)} - x| = |\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta)| = |\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta + 2n\pi)| \leq |\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha|.$$

Le terme à droite tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_{\varphi(n)} = x$.

**4.** La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à valeurs dans $[-1, 1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1, 1]$ ( $[-1, 1]$ est un fermé ) et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel $x \in [-1, 1]$ est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

●●●●●●●●●●

1. Si $x - y > 1$ alors $E(x) > E(y)$.
2. Preuve en exercice.