Devoir libre $n°04$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Exercice 1 :

1. $\overline{B}(0,R)$ est un fermé borné de E, qui est de dimension finie, donc $\overline{B}(0,R)$ est une partie compacte.

2. Soit $a \in F$. Puisque f est coercive, $f(a) \in \mathbb{R}$, et que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit, en revenant à la définition de la limite, qu'il existe $R > 0$ (qui dépend de a) tel que $\|x\| > R \Rightarrow f(x) > f(a)$. On en déduit donc que $\inf\limits_{x\in F} f(x) = \inf\limits_{x\in F\cap\overline{B}(0,R)} f(x)$.

De plus, $\overline{B}(0,R)$ est compact et F est fermé donc $\overline{B}(0,R)\cap F$ est compact. f est continue sur $\overline{B}(0,R)\cap F$, on en déduit que f atteint sa borne inférieure, et d'après l'égalité précédente, f atteint son minimum sur F : il existe $x_0 \in F$ tel que

$$f(x_0) = \inf_{x\in F} f(x).$$

3. (a) On sait que la norme est une application continue, donc φ est continue comme composée d'applications continues.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy d'éléments de E. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (propriété des suites de Cauchy). On en déduit que tous les termes de cette suite sont contenus dans une boule fermée $\overline{B}$ qui est donc compacte. En utilisant cette propriété de compacité, on en déduit que l'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une sous-suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain u_∞ dans $\overline{B}$. Enfin, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - u_\infty\| \leq \|u_n - u_{\psi(n)}\| + \|u_{\psi(n)} - u_8\|$. Cette majoration est classique. Le premier terme converge vers 0 car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et le second converge également vers 0 car $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_8. Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_8 et E est complet.

(c) Il suffit d'appliquer les résultats de la première question à la fonction φ, qui est bien continue. φ est coercive car $\forall y \in E$, $\varphi(y) \geq \|y\| - \|x\|$. De plus, E étant de dimension finie est fermé.

Exercice 2 :

1. *L'unicité :* On a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|$. Donc $(1-\alpha)\|x - y\| \leq 0$ avec $1 - \alpha > 0$, donc $\|x - y\| = 0$ et $x = y$.

L'existence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|,$$

et donc par récurrence $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \|x_1 - x_0\| \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i,$$

en utilisant l'inégalité précédente. $k \in [0, 1[$ on obtient une série géométrique convergente, et donc :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

inégalité qui prouve que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente vers l dans E (Banach) et l est dans $\overline{A}$.
De plus A est complète donc la limite est dans A.
f étant continue, passant donc à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$, on trouve $l = f(l)$. Ce point fixe est unique d'après ce qui précède.

Applications

2. Application 1 :
Par définition de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n} \text{ avec } v_1 = 1.$$

En posant $G(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ avec $x \in]0, +\infty[$, on a $v_{n+1} = G(v_n)$. L'étude de la fonction G montre qu'elle applique l'intervalle $J = \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ dans J et admet, dans cet intervalle un unique point fixe $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, solution positive de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.
On a $v_{n+1} = G(v_n)$ et, sur le voisinage J, la fonction dérivée G' de G, à savoir $G'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ vérifie la double inégalité :

$$0 < |G'(x)| < \frac{4}{9} < 1.$$

En vertu du théorème du point fixe, la suite (v_n) converge et sa limite $l > 0$ vérifie donc $G(l) = l$, soit $l = 1 + \dfrac{1}{l}$.

3. Application 2 :

(a) Les droites (MP_M) et $(M'P_{M'})$ sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès, appliqué dans le triangle (MP_MC) , on a
$$\frac{P_MP_{M'}}{MM'} = \frac{P_MC}{MC} = |\cos c|$$

(b) Si $M \neq M'$, alors $P_M \neq P_{M'}$ et $Q_M \neq Q'_M$, en considérant les triangles (AP_MQ_M) et (BQ_MR_M) on aura aussi :
$$\frac{Q_MQ_{M'}}{P_MP_{M'}} = |\cos a| \quad \text{et} \quad \frac{R_MR_{M'}}{Q_MQ_{M'}} = |\cos b|$$
Donc $R_MR_{M'} = |\cos a||\cos b||\cos c|MM' \leq kMM'$ avec $k = |\cos a||\cos b||\cos c| \in [0, 1[$ (car $a, b, c \in]0, \pi[$), cette inégalité se traduit à l'aide de φ par l'inégalité :

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq k|x - x'|,$$

autrement dit, la fonction φ est une contraction stricte, donc admet un point fixe unique x, c'est-à-dire il existe un unique point M d'abscisse x tel que $M = R_M$.

4. Application 3 :

(a) La linéarité de φ est évidente. Elle découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale. Montrons maintenant que φ est continue. Soit $x \in \mathscr{C}([a, b])$. k étant continue sur $[a, b]^2$ qui est compact (fermé borné en dimension finie), il est clair que la quantité $M := (b-a) \displaystyle\sup_{(x,y)\in[a,b]^2} |k(x, y)|$ existe et est finie.

On a alors
$$\|\varphi(f)\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b k(x, t)f(t)\mathrm{d}t \right|.$$

Or
$$\left| \int_a^b k(x, t)f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |k(x, t)|.|f(t)|\mathrm{d}t \leq M\|f\|_\infty.$$
On en déduit, par passage à la borne supérieure que

$$\|\varphi(f)\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$$

et puisque φ est linéaire, cette inégalité prouve que φ est continue.

(b) i. Introduisons l'opérateur $T : f \mapsto T(f) = g + \mu\varphi(f)$. Admettons si $f \in \mathscr{C}([a,b])$, alors $T(f) \in \mathscr{C}([a,b])$ [1]. Donc T est un endomorphisme de $\mathscr{C}([a,b])$, de plus, il est alors tout à fait clair que l'équation (1) s'écrit alors $T(f) = f$.

ii. Soient f et h deux éléments de E. On a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(h)(x)| &= \left|\mu \int_a^b k(x,t)(f(t) - h(t))\mathrm{d}t\right| \\ &\leq |\mu| M \|f - h\|_\infty \int_a^b \mathrm{d}t \\ &\leq |\mu| M(b-a)\|f - h\|_\infty \end{aligned}$$

et par conséquent : $\|T(f) - T(h)\|_\infty \leq \mu|M(b-a)\|f - h\|_\infty$, et comme $|\mu|M(b-a)| < 1$, alors T est une contraction stricte de $(E, \|\|_\infty)$.

iii. f est solution de (1) si, et seulement si f est un point fixe pour l'opérateur T. De plus, $\mathscr{C}([a,b])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet et T est contractant. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que l'équation (1) possède une unique solution continue sur $[a,b]$.

• • • • • • • • • • •

1. voir les fonctions définies par des intégrales