Devoir libre $n°05$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●

1. Il est clair que si $l \in E^*$, ${}^t u(l) = l \circ u \in E^*$. Soient l et k deux formes linéaires de E et λ, μ deux salaires. On a :

$$\begin{aligned} {}^t u(\lambda l + \mu k) &= (\lambda l + \mu k) \circ u && (1)\\ &= \lambda l \circ u + \mu k \circ u && (2)\\ &= \lambda {}^t u(l) + \mu {}^t u(k) && (3) \end{aligned}$$

Donc l'application ${}^t u$ est un endomorphisme de E^*.

2. Pour toute forme linéaire l de E, on a

$$\begin{aligned} {}^t(u \circ v)(l) &= l \circ (u \circ v) && (4)\\ &= (l \circ u) \circ v && (5)\\ &= {}^t v \circ (l \circ u) && (6)\\ &= {}^t v \circ {}^t u(l) && (7) \end{aligned}$$

Autrement dit, ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$.

3. Pour tout $x \in E$, on a :

$$u \circ (f \otimes a)(x) = u(f(x)a) = f(x)u(a) = (f \otimes u(a)(x)$$

et

$$(f \otimes a) \circ u(x) = f(u(x))a = {}^t u(f)(x)a = {}^t u(f) \otimes a(x)$$

et ceci prouve les deux égalités demandées.

4. Soit $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ des scalaires tels que $\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{ij} u_{ij} = 0$. Donc $\forall x \in E$,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{ij} u_{ij}(x) = 0$$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{ij} (f_i \otimes a_j)(x) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} f_i(x)) a_j = 0$$

et comme $\mathscr{A}$ est une base de E, alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in E$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i(x) = 0$ ou encore $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i = 0$ et comme $\mathscr{F}$ est une base de E^*, alors $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\alpha_{ij} = 0$. Donc la famille $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$ et comme il s'agit d'une famille à n^2 éléments qui est égal à la dimension de $\mathscr{L}(E)$, alors la famille $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base $\mathscr{L}(E)$.

-II-

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t u(e_j^*)(e_i) &= e_j^*(u(e_i)) && (8)\\ &= e_j^*(\lambda_i e_i) && (9)\\ &= \lambda_i e_j^*(e_i) && (10)\\ &= \lambda_i \delta_{ij} && (11)\\ &= \lambda_j \delta_{ij} && (12)\\ &= \lambda_j e_j^*(e_i) && (13) \end{aligned}$$

D'où, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, ${}^t u(e_j^*) = \lambda_j e_j^*$.

2. (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{u,v}(u_{ij}) &= u_{ij} \circ u - v \circ u_{ij} && (14)\\ &= (e_i^* \otimes a_j) \circ u - v \circ (e_i^* \otimes a_j) && (15)\\ &= {}^t u(e_i^*) \otimes a_j - e_i^* \otimes v(a_j) && (16)\\ &= \lambda_i e_i^* \otimes a_j - \mu_j e_i^* \otimes a_j && (17)\\ &= (\lambda_i - \mu_j) e_i^* \otimes a_j && (18)\\ &= (\lambda_i - \mu_j) u_{ij} && (19) \end{aligned}$$

Donc u_{ij} est un vecteur propre de $\Phi_{u,v}$ et $\lambda_i - \mu_j$ est la valeur propre associée. Ceci montre aussi que la matrice de $\Phi_{u,v}$ dans la base $(u_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est diagonale.

(b) D'après ce qui précède, on déduit que le polynôme caractéristique de $\Phi_{u,v}$ est donné par :

$$\chi_{\Phi_{u,v}}(X) = \det\left(XI_{n^2} - \text{mat}\left(\Phi_{u,v}, (u_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\right)\right) = \prod_{1\leq i,j\leq n} (X - \lambda_i + \mu_j) = \prod_{1=1}^{n} \chi_u(\mu_j + X)$$

(c) Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \chi_\Phi(X) = \chi_{\Phi_{u,u}}(X) &= \prod_{\mu\in S} \left[\chi_u(\mu + X)\right]^{m_\mu} && (20)\\ &= \prod_{\mu\in S}\left[\prod_{\lambda\in S}(X+\mu-\lambda)^{m_\lambda}\right]^{m_\mu} && (21)\\ &= \prod_{(\mu,\lambda)\in S^2} (X+\mu-\lambda)^{m_\mu m_\lambda} && (22)\\ &= \prod_{\lambda\in S} X^{m_\lambda^2} \prod_{\{\lambda,\mu\}\in S_2} \left[(X-\lambda+\mu)(X-\mu+\lambda)\right]^{m_\mu m_\lambda} && (23)\\ &= \prod_{\lambda\in S} X^{m_\lambda^2} \prod_{\{\lambda,\mu\}\in S_2} \left[(X^2 - (\lambda-\mu)^2\right]^{m_\mu m_\lambda} && (24)\\ &= X^{\sum\limits_{\lambda\in S} m_\lambda^2} \prod_{\{\lambda,\mu\}\in S_2} \left[(X^2 - (\lambda-\mu)^2\right]^{m_\mu m_\lambda} && (25) \end{aligned}$$

(d) On remarque que $\mathscr{C}_u = \ker \Phi_{u,u}$ et donc $\mathscr{C}_u$ est le sous-espace propre de $\Phi_{u,u}$ associé à la valeur propre 0 et comme $\Phi_{u,u}$ est diagonalisable, alors

$$\dim \mathscr{C}_u = \dim \ker (\Phi_{u,u}) = \text{l'ordre de multiplicité de o de } \chi_{\Phi_{u,u}},$$

donc

$$\dim \mathscr{C}_u = \sum_{\lambda \in S} m_\lambda^2.$$

3. D'après les hypothèses, on a $m_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in S$, et donc $\dim \mathscr{C}_u = n$.
Il est clair que $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, ..., u^{n-1}) \subset \mathscr{C}_u$. Montrons que la famille $(\mathrm{id}_E, u, ..., u^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$. En réalité si $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0$, alors le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ de degré inférieure ou égal à $n-1$ admet n racines distinctes qui sont les valeurs propres de u, donc $P = 0$, et donc la famille $(id_E, u, ..., u^{n-1})$ est libre, d'où :

$$\mathscr{C}_u = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, ..., u^{n-1}).$$

D'où le résultat demandé.

••••••••••