Devoir libre $n°06$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●●

Exercice 1 :

1. On peut vérifier par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \geq n$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = +\infty$.

2. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} F_{n+1} - wF_n &= (1-w)F_n + F_{n-1} && (1)\\ &= \frac{(w^2-w)F_n - wF_{n-1}}{-w} && (2)\\ &= \frac{-1}{w}(F_n - wF_{n-1}) && (3) \end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{F_{n+1} - wF_n}{F_n - wF_{n-1}} = \dfrac{-1}{w}$. Puis par récurrence sur n, on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} - wF_n = \left(\frac{-1}{w}\right)^{n+1}.$$

D'après la question précédente et comme $w > 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = w$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} F_{2n+2} &= F_{2n+1} + F_{2n} && (4)\\ &= F_{2n} + F_{2n-1} + F_{2n} && (5)\\ &= F_{2n} + F_{2n} - F_{2n-2} + F_{2n} && (6)\\ &= 3F_{2n} - F_{2n-2} && (7) \end{aligned}$$

Donc $(F_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$. De même, on montre que $(F_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{E}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} &= x_{n+1}^2 - x_n(3x_{n+1} - x_n) && (8)\\ &= x_n^2 - x_{n+1}(3x_n - x_{n+1}) && (9)\\ &= x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} && (10) \end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et prend la valeur $x_1^2 - x_0x_0$ et donc on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} (x_1^2 - x_0x_2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 - x_{k-1}x_{k+1}}{x_k x_{k+1}} && (11)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} - \frac{x_{k-1}}{x_k}\right) && (12)\\ &= \frac{x_n}{x_{n+1}} - \frac{x_0}{x_1} && (13) \end{aligned}$$

(c) De ce qui précède, on déduit que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left(F_2^2 - F_0F_4\right)\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} = \frac{F_{2m}}{F_{2m+1}} - \frac{F_0}{F_2}$$

et donc

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{F_{2m}F_{2m+1}}{F_{2m+1}F_{2m+2}}.$$

Ainsi, par passage à la limite quand m tend vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{w^2}.$$

Donc, en ajoutant le terme d'indice 0, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} = 1 - \frac{1}{w^2} = \frac{1}{w} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{14}$$

De même, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left(F_3^2 - F_1F_5\right)\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = \frac{F_{2m+1}}{F_{2m+3}} - \frac{F_1}{F_3}$$

et donc

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = -\frac{1}{3} + \frac{F_{2m+1}F_{2m+2}}{F_{2m+2}F_{2m+3}}.$$

Ainsi, par passage à la limite quand m tend vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = \frac{1}{w^2} - \frac{1}{3}.$$

On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = \frac{1}{w^2} = 1 - \frac{1}{w} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{15}$$

(d) En additionnant et en soustrayant les séries convergentes (14) et (15), on peut facilement conclure que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_nF_{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = 1$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = \sqrt{5} - 2.$$

C'est le résultat recherché

Exercice 2 :

1. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\alpha_n = a_n + (n-1)\alpha_{n-1}$ et donc en mettant au carré, on trouve $(n-1)^2\alpha_{n-1}^2 = n^2\alpha_n^2 - 2n\alpha_n a_n + a_n^2$, d'où :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ (n-1)^2\alpha_{n-1}^2 - (n^2-1)\alpha_n^2 + 2(n-1)\alpha_n a_n = (\alpha_n - a_n)^2 \geq 0$$
puis par division par le nombre positif $n-1$, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ (n-1)\alpha_{n-1}^2 - (n+1)\alpha_n^2 + 2\alpha_n a_n \geq 0$$
ce qui est équivalent à l'inégalité demandée.

2. Par sommation des inégalités de la question 1, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k \leq -n\alpha_n^2 \leq 0$$
ou encore
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \leq 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \leq 2\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
et par conséquent
$$\forall n \geq 1,\ \ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \leq 4\sum_{k=1}^{n}a_k^2 \leq 4A$$
On obtient l'inégalité demandée par passage à la limite.

3. Soit γ une constante positive vérifiant l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1}$ à termes positifs et telle que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ soit convergente.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Définissons la suite $(a_n^{(m)})_{n\geq 1}$ par :
$$a_n^{(m)} = \begin{cases} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$
Donc la suite associée $(\alpha_n^{(m)})_{n\geq 1}$ est donnée par :
$$\alpha_n^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ \dfrac{\sqrt{m}}{n} & \text{si } m < n \end{cases}$$
On a $\forall n \in [\![2, m]\!]$, $a_n^{(m)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n-1}}$ et donc $\left(a_n^{(m)}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donc
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} &= \sum_{n=1}^{m}\left(\alpha_n^{(m)}\right)^2 \leq \gamma\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(m)}\right)^2 && (16)\\ &\leq \gamma\left(1 + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{m-1}\frac{1}{n}\right) \leq \frac{3\gamma}{4} + \frac{\gamma}{4}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} && (17)\end{aligned}$$

ou encore $H_m \leq \frac{3\gamma}{4} + \frac{\gamma}{4} H_m$, où $H_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$. En divisant par H_m qui tend vers $+\infty$ quand m tend vers l'infini, et en faisant tendre m vers l'infini, on obtient l'inégalité $1 \leq \frac{\gamma}{4}$ ou encore $4 \leq \gamma$. Donc 4 est la meilleure constante qui vérifie l'inégalité $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

4. Soient J une partie finie de $\mathbb{N}^{*2}$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $J \subset [\![1, N]\!]^2$. On a :

$$\sum_{(m,n)\in J} \frac{u_m u_n}{m+n} \leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{u_m u_n}{m+n} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m u_n}{m+n} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} \frac{u_m u_n}{m+n}.$$

On échange les deux sommes du dernier terme

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{u_m u_n}{m+n} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m u_n}{m+n} + \sum_{m=2}^{N} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u_m u_n}{m+n}.$$

On utilise l'inégalité $m+n \geq n$ pour majorer le premier terme et faire apparaître $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$ et l'inégalité $m+n \geq m$ pour le second terme en faisant apparaître $v_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} u_k$ quitte à adjoindre u_m terme positif à la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{u_m u_n}{m+n} &\leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m u_n}{n} + \sum_{m=2}^{N} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u_m u_n}{m} && (18) \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} u_n v_n + \sum_{m=2}^{N} u_m v_m \leq 2 \sum_{n=1}^{N} u_n v_n. && (19) \end{aligned}$$

L'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ complète l'étude

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{u_m u_n}{m+n} \leq \sum_{n=1}^{N} (u_n^2 + v_n^2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2.$$

Finalement, la famille étudiée est sommable car les sommes partielles sur les parties finies sont majorées. (la série $\sum_{m\in\mathbb{N}^*} v_m^2$ converge d'après la question **2.**)

•••••••••••