Devoir libre $n°07$
Correction

*N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.*

•••••••••••

**Exercice 1 :**

**1.** Notons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k > 0$. Alors $(1+2+...+n)^2 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{k}{\sqrt{a_k}}$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$(1+2+...+n)^2 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{k}{\sqrt{a_k}} \leq \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k})^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2.$$

Donc

$$(1+2+...+n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right).$$

**2.** (a) Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que $4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{2n+1}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$. Or $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{2n+1}{(1+2+...+n)^2}$. D'après le résultat de la question précédente :

$$\frac{1}{a_1+a_2+...a_n} \leq \frac{1}{(1+2+...+n)^2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + ... + \frac{n^2}{a_n}\right).$$

En multipliant par $2n+1$, on obtient :

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+...a_n} \leq \frac{2n+1}{(1+2+...+n)^2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + ... + \frac{n^2}{a_n}\right) = 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+...a_n} \leq 4\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

Transformons le second terme :

$$\begin{aligned}
4\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} &= 4\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k} \\
&= 4\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k} \\
&= 4\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= 4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k^2}{a_k} > 0$ et $\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(N+1)^2}\right) \leq \dfrac{1}{k^2}$, on obtient donc l'inégalité demandée :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}.$$

(c) La série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ est convergente ( par hypothèse ) et à termes positifs, donc $\forall N \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$, d'où :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Ainsi la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ est à termes positifs et la suites de ses sommes partielles est majorée Elle est donc convergente.
On peut vérifier facilement que $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$. De plus la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ converge donc il en est de même pour la série de terme général $\dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \frac{1}{2} \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$$

**Exercice 2 :** Soient $n \geq 1, x > 0$, On note : $f_n(x) = \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right) \mathrm{d}t$. Il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions positives sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme pour $t$ dans $[n, n+1]$, $\dfrac{1}{t^x} \geq \dfrac{1}{(n+1)^x}$, alors $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$. Soit maintenant $a > 0$, alors pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, +\infty[} |f(x)| \leq \frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Le terme à droite de l'inégalité étant positif et est équivalent à $\dfrac{a}{n^{a+1}}$. Comme $a + 1 > 1$ la série de fonction de terme $f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$. Donc sa somme est définie sur $]0, +\infty[$ de plus pour tout $n \geq 1$, $f_n$ est continue sur tout $[a, +\infty[$ quelque soit $a > 0$. Donc la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ est également continue sur $]0, +\infty[$.

**Exercice 3 :**

**1.** Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ de réels :

$$(1)\quad \overset{n}{\triangle} y_k = \sum_{j=0}^{n} \mathtt{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j}.$$

Pour $n = 0$, la formule (1) donne : $\overset{0}{\triangle} y_k = y_k$, ce qui est vérifié, pour $n = 1$, elle donne : $\triangle y_k = -y_k + y_{k+1}$, ce qui est aussi vérifié. Supposons la formule (1) vérifiée pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors :

$$\begin{aligned}
\overset{n+1}{\triangle}(y_k) &= \triangle(\overset{n}{\triangle} y_k) = \triangle\left(\sum_{j=0}^{n} \mathtt{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathtt{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+1+j} - \sum_{j=0}^{n} \mathtt{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j}\\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \mathtt{C}_n^{j-1} (-1)^{n-(j-1)} y_{k+1+(j-1)} - \sum_{j=0}^{n} \mathtt{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j}\\
&= y_{k+n+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} y_{k+j} - \sum_{j=1}^{n} \mathtt{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j} + (-1)^{n+1} y_k\\
&= y_{n+1+k} + \sum_{j=1}^{n} \mathtt{C}_{n+1}^j (-1)^{n+1-j} y_{k+j} + (-1)^{n+1} y_k\\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \mathtt{C}_{n+1}^j (-1)^{n+1-j} y_{k+j}.
\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n} \mathtt{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j}$.

**2.** Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(X^k(1-X)^{n-k}) = n$, ainsi, chaque terme de la somme est de degré inférieure ou égal à $n$. Donc $B_n(f, x)$ est de degré au plus $n$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons : $y_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$. D'après (1), on a donc :

$$\forall t \in [\![0, n]\!],\quad \overset{t}{\triangle}(y_0) = \sum_{j=0}^{t} \mathtt{C}_t^j (-1)^{t-j} y_j = \sum_{j=0}^{t} \mathtt{C}_t^j (-1)^{t-j} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Or

$$\mathtt{C}_n^t \mathtt{C}_t^k = \frac{n!}{t!(n-t)!}\frac{t!}{k!(t-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(t-k)!(n-t)!} = \mathtt{C}_k^n \mathtt{C}_{n-k}^{t-k}.$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n} \overset{t}{\Delta} f(0)\mathsf{C}_n^t x^t &= \sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{t}\mathsf{C}_t^k(-1)^{t-k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathsf{C}_n^t x^t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{t=k}^{n}\mathsf{C}_{n-k}^{t-k}(-1)^t x^k\right)\mathsf{C}_n^k(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n-k}\mathsf{C}_{n-k}^{p}(-1)^{p+k} x^{p+k}\right)\mathsf{C}_k^n(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n-k}\mathsf{C}_{n-k}^{p}(-x)^{p} 1^{(n-k)-p}\right)\mathsf{C}_k^n x^k f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(1-x)^{n-k}\mathsf{C}_k^n x^k f\left(\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in [0,1],\ \sum_{t=0}^{n} \overset{t}{\Delta} f(0)\mathsf{C}_n^t x^t = B_n(f,x)$.

**3.** (a) Si $f : x \mapsto 1$, alors on a $B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\mathsf{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$.

(b) Si $f : x \mapsto x$, on trouve $B_n(f,x) = x$.

(c) Si $f : x \mapsto x^2$, on trouve $B_n(f,x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2$.

**4.** Dans les deux cas précédents, les suites $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant constantes, elles convergent uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.
Dans le dernier cas, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \ |B_n(f,x) - f(x)| = \left|\frac{x-x^2}{n}\right|$$

et puisque le minimum de la fonction : $x \mapsto x - x^2$ sur $[0,1]$ est $\frac{1}{4}$, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f,x) - f(x)| = \frac{1}{4n}$$

ce qui signifie que la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

**5.** Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\mathsf{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}(k^2-2knx+n^2x^2)\mathsf{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \\
&= n^2B_n(x^2,x) - 2n^2xB_n(x,x) + n^2x^2B_n(1,x) \\
&= n^2\left(\frac{x+(n-1)x^2}{n}\right) - 2n^2x.x + n^2x^2.1 \\
&= nx(1-x).
\end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in [0,1],\ \ \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\mathsf{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Soit $\delta > 0$. Alors :

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta \Leftrightarrow |k - nx| \geq \delta n \Leftrightarrow (k - nx)^2 \geq \delta^2 n^2$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \mathtt{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2} \mathtt{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} && (1)\\
&\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \frac{(k-nx)^2}{\delta^2 n^2} \mathtt{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} && (2)\\
&\leq \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \mathtt{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} && (3)\\
&\leq \frac{1}{\delta^2 n^2} nx(1-nx) && (4)
\end{aligned}$$

et, en majorant encore $x \mapsto x - x^2$ sur $[0,1]$ par $\frac{1}{4}$, on obtient :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \mathtt{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4\delta^2 n}$$

**6.** Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $f$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue. Donc :

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x, y \in [0,1], \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Donc, si $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$, alors $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$ ou encore

$$f(x) - \varepsilon < f\left(\frac{k}{n}\right) < f(x) + \varepsilon$$

Maintenant, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned}
|B_n(f,x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\right|\\
&= \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}^{n} \mathtt{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathtt{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\right|\\
&\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}^{n} \mathtt{C}_n^k \|f\|_\infty x^k (1-x)^{n-k} + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathtt{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\right|\\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{4\delta^2 n} + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathtt{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\right|
\end{aligned}$$

Or, dans cette dernière somme, on a bien $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$, donc $f\left(\frac{k}{n}\right) < f(x) + \varepsilon$, et ainsi :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathtt{C}_n^k f\left(\frac{l}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \leq \left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathtt{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right) (f(x) + \varepsilon) \leq f(x) + \varepsilon.$$

ce qui permet de majorer cette dernière somme par $\varepsilon$. Ainsi, à partir d'un certain rang $n_0$ tel que $\dfrac{\|f\|_\infty}{4\delta^2 n} < \varepsilon$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq n_0 \Rightarrow |B_n(f,x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

ce qui signifie que la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.