Devoir libre $n°09$
Correction

1. A est une matrice symétrique réelle alors A admet une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$.

2. • Si pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\lambda_k = 0$ alors A est semblable à la matrice nulle et par suite A est nulle ce qui est absurde. Alors il existe $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$.

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

• Si $\lambda_1 \geq 0$, alors $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$ et par suite $\operatorname{tr}(A) > 0$, ce qui est absurde. De même si $\lambda_n \leq 0$, alors $\lambda_k < 0$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$ et par suite $\operatorname{tr}(A) < 0$, ce qui est aussi absurde. On conclut que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.

3. Écrivant $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$. On a $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$. Avec $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on obtient :

$$\lambda_1 \|X\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq Q(X) \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n \|X\|^2.$$

4. (a) Il est clair que S est borné de $\mathbb{R}^n$. De plus S est un fermé de $\mathbb{R}^n$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $X \mapsto \|X\|$.

(b) • Q est continue sur $\mathbb{R}^n$ comme étant une fonction polynomiale.
• Q est continue sur le fermé borné S donc elle est bornée et atteint ses bornes.

(c) • $Q(v_1) = {}^t v_1 A v_1 = \lambda_1 \|v_1\|^2$ et $Q(v_n) = {}^t v_n A v_n = \lambda_n \|v_n\|^2$.
• $\forall X \in S$, $\lambda_1 \leq Q(X) \leq \lambda_n$.
• $\forall X \in S$, $\lambda_1 \leq Q(X)$ donc $\lambda_1 \leq \min\limits_{X \in S} Q(X)$ et $\min\limits_{X \in S} Q(X) \leq Q(v_1) = \lambda_1$ car $v_1 \in S$ donc $\lambda_1 = \min\limits_{X \in S} Q(X)$.
• $\forall X \in S$, $\lambda_n \geq Q(X)$ donc $\lambda_n \geq \max\limits_{X \in S} Q(X)$ et $\max\limits_{X \in S} Q(X) \geq Q(v_n) = \lambda_n$ car $v_n \in S$ donc $\lambda_n = \max\limits_{X \in S} Q(X)$.

5. (a) • Il est clair que $Q(X) = {}^t X A X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Par inégalité triangulaire et inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
|Q(X)| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j| \right) |x_i| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|X\| \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Avec $a_{ij} = a_{ij}^2$, on a

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_{ij}| \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij} |x_{ij}| \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^2 \right) \leq \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^2 \right),$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j| \right)^2 \leq \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^2 \right) \right) = \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) x_j^2 \right) \leq \alpha^2 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = \alpha^2 \|X\|^2$$

et par suite $|Q(X)| \leq \alpha \|X\|^2$.
• Puisque $v_n \in S$, on a $|Q(v_n)| = \lambda_n \leq \alpha$.

(b) • On a $Q(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ et $Q(|X|) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_i||x_j|$ donc $|Q(X)| \leq Q(|X|)$.
• $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $|Q(v_i)| = |\lambda_i| \leq Q(|v_i|) \leq \lambda_n \||v_i|\|^2 = \lambda_n \|v_i\|^2 = \lambda_n$.

6. (a) • En développant suivant la première colonne, on obtient

$$P_{n+2}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda P_{n+1}(\lambda) - P_n(\lambda).$$

• C'est évident que $P_2(2) = 3$ et $P_3(2) = 4$. Supposons que $P_n(2) = n+1$ et $P_{n+1}(2) = n+2$. Donc

$$P_{n+2}(2) = 2P_{n+1}(2) - P_n(2) = n+3$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) = n+1$.

(b) D'après la question **5.**, pour toute valeur propre μ de A_n, on a $|\mu| \leq \alpha = 2$ et d'après la question **6.(a)** 2 n'est pas une valeur propre de la matrice A_n. D'où $|\mu| < 2$.

(c) On a $\frac{|\mu|}{2} < 1$ et la fonction $\cos$ est une bijection de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$ donc il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que $\mu = 2\cos(\theta_0)$.

(d) La suite $(P_n(\mu))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos(\theta_0)r + 1 = 0$ de racines $e^{i\theta_0}$ et $e^{-i\theta_0}$.
Sachant que $P_1(\mu) = \mu = e^{i\theta_0} + e^{-i\theta_0}$ et $P_2(\mu) = \mu^2 - 1 = 4\cos^2(\theta_0) - 1 = e^{2i\theta_0} + e^{-2i\theta_0} + 1$, on parvient à

$$P_n(2\cos(\theta_0)) = \frac{\sin((n+1)\theta_0))}{\sin(\theta_0)}.$$

L'équation $\sin((n+1)\theta_0) = 0$ admet n racines dans l'intervalle $]0, \pi[$ qui sont les réels $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$. Par bijectivité de la fonction $\cos$ sur l'intervalle $]0, \pi[$, les n réels $x_k = 2\cos(\alpha_k)$, $k = 1, \dots, n$ sont distincts et ce sont des racines de P_n. P_n, qui est de degré n, et donc scindé à racines simples. D'où :

$$\mathrm{Sp}(A_n) = \left\{ \frac{k\pi}{n+1} \;\middle|\; k \in [\![1, n]\!] \right\}.$$

• • • • • • • • • • •