Devoir libre $n^\circ 10$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Exercice 1 :

1. On a $a_n = \text{card}\{\ (k_1, k_2, ..., k_n) \in \{0,1,2\}^n \mid k_1 + k_2 + ... + k_n = n\ \}$. On trouve $a_1 = \text{card}\{1\} = 1$, $a_2 = \text{card}\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$ 3 et $a_3 = \text{card}\{(0,1,2),(0,2,1),(1,0,2),(1,2,0),(1,1,1),(2,0,1),(2,1,0)\} = 7$.

2. On a $P(X) = (1+X+X^2)^n = \displaystyle\sum_{\substack{(k_1,k_2,...,k_n)\in\{0,1,2\}^n\\ k_1+k_2...+k_n=l, 0\le l\le 2n}} X^l$. Donc le coefficient de X^n dans le polynôme P est

$$\sum_{\substack{(k_1,k_2,...,k_n)\in\{0,1,2\}^n\\ k_1+k_2...+k_n=n}} 1 = \text{card}\{\ (k_1, k_2, ..., k_n) \in \{0,1,2\}^n \mid k_1 + k_2 ... + k_n = n\ \} = a_n.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-int}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{(k_1,k_2,...,k_n)\in\{0,1,2\}^n\\ k_1+k_2...+k_n=l, 0\le l\le 2n}} \int_0^{2\pi} e^{ilt}e^{-int}\mathrm{d}t && (1)\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{(k_1,k_2,...,k_n)\in\{0,1,2\}^n\\ k_1+k_2...+k_n=l, 0\le l\le 2n}} \int_0^{2\pi} e^{i(l-n)t}\mathrm{d}t && (2)\end{aligned}$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(l-n)t}\mathrm{d}t$ sont nuls sauf si $l = n$, d'où :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-int}\mathrm{d}t = \sum_{\substack{(k_1,k_2,...,k_n)\in\{0,1,2\}^n\\ k_1+k_2...+k_n=n}} 1 = a_n.$$

4. On a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e^{it}+e^{2it})^n e^{-int}\mathrm{d}t && (3)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}(e^{-it}+1+e^{it})^n e^{-int}\mathrm{d}t && (4)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n\mathrm{d}t && (5)\end{aligned}$$

La fonction sous-signe intégrale est paire et 2π-périodique, donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos t)^n\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+2\cos t)^n\mathrm{d}t.$$

5. Pour tout $x \in \left[\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$ et tout $t \in [0,\pi]$, on a $|(1+2\cos t)^n x^n| \le (3|x|)^n$, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(1+2\cos t)^n x^n$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ et donc on peut l'intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n && (6)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+2\cos t)^n\mathrm{d}t\right)x^n && (7)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}((1+2\cos t)x)^n\right)\mathrm{d}t && (8)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-x(1+2\cos t)}. && (9)\end{aligned}$$

6. Avec le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-x(1+2\cos t)} && (10)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{(1+x)u^2+1-3x} && (11)\\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{1+x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1-3x} \quad \text{avec } v=\sqrt{1+x}u && (12)\\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{1+x}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-3x}}\arctan\frac{v}{\sqrt{1-3x}}\right]_0^{+\infty} && (13)\\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-3x)}} && (14) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \left[\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$, on a $A^2(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1-3x)} = \dfrac{1}{1-2x-3x^2}$. Donc

$$2A(x)A'(x) = \frac{2(1+3x)}{(1-2x-3x^2)^2}$$

et donc

$$\forall x \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right], \quad \frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{1+3x}{1-2x-3x^2}.$$

7. Pour $x \in \left[\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$, on peut dériver A terme à terme et on a :

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

L'égalité de la question précédente entraîne :

$$(1-2x-3x^2)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = (1+3x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1}.$$

Après changement d'indice, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 3(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + a_0 = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, ceci équivaut à :

$$\forall n \geq 2,\ \ (1+n)a_{n+1} - (2n+1)a_n - 3n a_{n-1} = 0 \text{ et } 2a_2 - 3a_1 - 3a_0 = 0.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}a_n + \frac{3n}{n+1}a_{n-1}.$$

Exercice 2 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto 1 - x\sin^2 t$ est continue et monotone sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc l'ensemble de ses valeurs est le segment d'extrémités $1-x$ et 1. Il en résulte que si $x<1$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-x\sin^2 t}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $f(x)$ est définie pour $x<1$.

Si $x>1$, $1-x\sin^2(t)$ s'annule pour $\sin^2(t) = \dfrac{1}{x}$, donc $1-x\sin^2(t)$ n'est pas positif sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc la racine n'existe pas et f non plus.

Si $x=1$, on obtient l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$ qui est divergente en vertu de l'équivalence $\sin(t) \sim t$ au voisinage de 0.

En conclusion, le domaine de définition de f est $D =]-\infty, 1[$.

2. La fonction $h : (x,t) \in]-\infty, 1[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x\sin^2(t)}}$ a pour dérivée partielle par rapport à x

$$(x,t) \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(t)}{(1 - x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Elle est continue par morceaux en t à x fixé, continue en x à t fixé, de plus pour tout segment $[a,b]$ de $]-\infty, 1[$, la fonction $(x,t) \in [a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{1}{2}\frac{\sin^2(t)}{(1 - x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}$ est continue, elle est bornée et donc l'hypothèse de domination est vérifiée. En vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Comme a et b sont arbitraires, f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$, et

$$f'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{(1 - x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t.$$

De même, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty, 1[$ et

$$f''(x) = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(t)}{(1 - x\sin^2(t))^{\frac{5}{2}}} \mathrm{d}t.$$

3. Pour $x \in]-1, 1[$, on connait de développement :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} x^n.$$

Quand $\alpha = \frac{-1}{2}$, le coefficient de x^n devient $\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}$. D'où, pour $x \in]-1, 1[$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x\sin^2(t)}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}(x\sin^2(t))^n.$$

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}(x\sin^2(t))^n\right| \leq \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$. Le terme à droite est le terme général d'une série convergente, donc la série converge normalement et donc uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc on peut intégrer terme à terme cette série, d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}(x\sin^2(t))^n\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} w_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} w_n x^n. \end{aligned}$$

4. (a) Cherchons des solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0 :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \;\; y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \;\; y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n x^{n-2}.$$

En reportant ces séries dans l'équation (E), on obtient :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{4} x^n = 0$$

Après les changements d'indices nécessaires pour ramener tous les termes à x^n on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}(2n+1)^2a_n-(n+1)^2a_{n+1}\right)x^n=0.$$

Si une fonction développable en série entière est nulle, ses coefficients doivent être nuls :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ a_{n+1}=\frac{1}{4}\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}a_n=\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2a_0.$$

Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n$ ont un rayon de convergence égal à 1 (règle de d'Alembert).

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sin(t)\cos(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right] &= \frac{\cos^2(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sin^2(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x\sin^2(t)\cos^2(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{5}{2}}}\\ &= \frac{\cos^2(t)-\sin^2(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x\sin^2(t)\cos^2(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{5}{2}}}\\ &= \frac{(1-2\sin^2(t))(1-x\sin^2(t))}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x\sin^2(t)\cos^2(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{5}{2}}}\\ &= \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2(t)+\frac{1}{2}x\sin^2(t)-\frac{1}{2}x\sin^4(t)}{(1-x\sin^2(t))^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}(x^2-x)f''(x)+(2x-1)f'(x)+\frac{1}{4}f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}\frac{(x^2-x)\sin^4(t)}{(1-x\sin^2(t))^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{(2x-1)\sin^2(t)}{(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t.\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sin(t)\cos(t)}{4(1-x\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

Donc f solution de l'équation différentielle (E). C'est l'unique solution de (E) qui vérifie les conditions intiales $y(0)=\frac{\pi}{2}$ et $y'(0)=\frac{\pi}{2}$. D'où par unicité,

$$\forall x\in]-1,1[,\ \ f(x)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2x^n.$$

Ainsi, on peut conclure que $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

5. Si $x>0$, $1-x\in]-\infty,0[$, donc g est bien définie et meme de classe $\mathscr{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned}(x^2-x)g''(x)+(2x-1)g'(x)+\frac{1}{4}g(x) &= \left((1-x)^2-(1-x)\right)f''(1-x)\\ &\quad+(2(1-x)-1)f'(1-x)+\frac{1}{4}f(1-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc g est bien solution de (E).

Soient α et β des réels tels que $\forall x\in]0,1[$, $\alpha f(x)+\beta g(x)=0$. On remplaçant x par $\frac{1}{2}$ dans l'équation précédente et sa dérivée on obtient :

$$(\alpha+\beta)f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \text{ et } (\alpha-\beta)f'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

comme $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$, alors $\alpha=\beta=0$, donc les f et g forment une base de solutions de l'équation différentielle (E). Ainsi toute solution de E est combinaison linéaire de f et g.

• • • • • • • • • • •