Devoir libre $n°11$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••

Partie 1. Généralités.

1. Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs on a :

$$MV_1 = V_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} m_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, ..., n, \ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1.$$

Donc M est stochastique si, et seulement si, $MV_1 = V_1$.

2. (a) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{S}_n$. Posons $C = AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

• Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \geq 0$ (tous les termes de cette expression étant positifs)

• $(AB)V_1 = A(BV_1) = AV_1 = V_1$, d'après ce qui précède, appliqué successivement à B puis à A. Ainsi, d'après la caractérisation des matrices stochastiques obtenue en **1.**, $AB \in \mathscr{S}_n$.

(b) Par récurrence évidente, A^k appartient à $\mathscr{S}_n$ puisque cet ensemble est stable pour le produit de matrices.

3. (a) Toute matrice stochastique laisse V_1 invariant, donc c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

(b) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{S}_n$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\|f(x)\| = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \|x\| \leq \|x\|.$$

Si λ est une valeur propre, alors il existe x un vecteur non nul tel que $f(x) = \lambda x$, on obtient donc :

$$|\lambda x| = |\lambda|\|x\| \leq \|x\|$$

et comme x est non nul, on en déduit que $|\lambda| \leq 1$.

4. (a) Si y un élément de l'ensemble $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \cap \ker(f - \mathrm{Id})$ il existe x de $\mathbb{C}^n$ tel que $y = f(x) - x$ mais puisque y appartient aussi par hypothèse à $\ker(f - \mathrm{Id})$, on a aussi : $f(y) = y$.

• On a $f(x) = y + x$.

• On a $f(y) = y = f^2(x) - f(x)$, ce qui donne : $f^2(x) = y + f(x) = 2y + x$.

On peut conjecturer que, pour tout entier $k \geq 1$: $f^k(x) = ky + x$. Si on suppose cette relation vraie au rang k, on obtient en composant par f :

$$f^{k+1}(x) = f(ky + x) = kf(y) = +f(x) = ky + (x + y) = (k + 1)y + x.$$

La propriété est donc bien vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

De cette relation, on déduit que :

$$\left|f^k(x)\right| + |x| \geq \left|f^k(x) - x\right| = k|y|.$$

Comme $|f(x)| \leq |x|$, alors peut vérifier que $|f^k(x)| \leq |x|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient alors

$$k|y| \leq |f^k(x) - x| \leq |f^k(x)| + |x| \leq 2|x|.$$

y est nécessairement nul, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien.

(b) On en déduit que les deux sous-espaces $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - \mathrm{Id})$ ont une intersection réduite au zéro. Mais d'après le théorème du rang, la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de $\mathbb{C}^n$, d'où :

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}).$$

5. Si λ une valeur propre de f autre que 1, et x est un vecteur propre associé, alors :

$$f(x) - x = \lambda x - x = (\lambda - 1)x.$$

Donc, $(\lambda - 1)x$ appartient par construction à $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, et puisque le coefficient $\lambda - 1$ est non nul, il en est de même de x.

Donc, si λ est une valeur propre autre que 1, $E_\lambda(f) = \ker(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.

6. (a) Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$, alors $M^k = PD^kP^{-1}$. La convergence d'une suite de matrice équivaut à la convergence de l'autre.

(b) Notons $D = \mathrm{diag}(1, ..., 1, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n)$. D'après les propriétés des matrices diagonales pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \mathrm{diag}(1, ..., 1, \lambda_{r+1}^k, ..., \lambda_n^k)$.

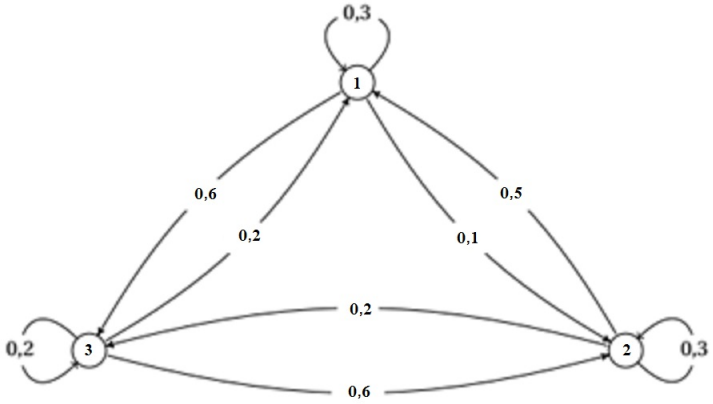
Les suites de termes $(\lambda_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent si et seulement si, ou bien $\lambda_i = 1$ (auquel cas la suite des puissances est stationnaire), ou bien leur module est strictement inférieur à 1 (auquel cas, il y a convergence vers 0). Donc, $(D^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement s'il n'y a pas d'autre valeur propre de module 1 que 1 lui-même. Dans ce conditions on a :

$$\lim_{k\to\infty} M^k = P\,\mathrm{diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0)P^{-1}.$$

(c) La matrice $L = P\,\mathrm{diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0)P^{-1}$ vérifie $L^2 = L$, elle représente la projection sur $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(f - \mathrm{Id})$.

Partie 2. Application à une situation probabiliste

Graphe probabiliste représentant la situation probabiliste :



1. (a) Soit l'événement B_3 : « choisir chaque année la région 2 durant les 3 premières années. » On a donc

$$B_3 = A_2(1) \cap A_2(2) \cap A_2(3).$$

La formule des probabilités composées donne

$$p(B_3) = p\left[A_2(1)\right] \times p\left[A_2(2)/A_2(1)\right] \times p\left[A_2(3)/A_2(1) \cap A_2(2)\right].$$

D'après l'hypothèse $\boxed{H_5}$, $p\left[A_2(3)/A_2(1)\cap A_2(2)\right]=p\left[A_2(3)/A_2(2)\right]$, donc

$$p(B_3)=\alpha_2(1)\times a_{22}^2=0,45\times(0,3)^3=0,0405.$$

De même, $B_n=A_2(1)\cap A_2(2)\cap\ldots\cap A_2(n)$, donc toujours d'après la formule des probabilités composées,

$$p(B_n)=p\left[A_2(1)\right]\prod_{i=1}^{n-1}p\left[A_2(i+1)/A_2(i)\right]=0,45\times(0,3)^{n-1}.$$

(b) Le système $\{A_1(1),A_2(1),A_3(1)\}$ étant complet d'après les hypothèses $\boxed{H_1}$ et $\boxed{H_2}$, donc d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}p\left[A_2(1)/A_1(2)\right] &= \frac{p\left[A_1(2)/A_2(1)\right]\times p\left[A_2(1)\right]}{\sum_{i=1}^{3}p\left[A_1(2)/A_i(1)\right]\times p\left[A_i(1)\right]}\\ &= \frac{0,45\times0,1}{0,2\times0,3+0,45\times0,1+0,35\times0,6}\\ &= \frac{9}{63}\sim0,143.\end{aligned}$$

(c) Soit C l'événement : « l'individu change de région entre la première et la deuxième année. » On a :

$$\overline{C}=\left[A_1(1)\cap A_1(2)\right]\cup\left[A_2(1)\cap A_2(2)\right]\cup\left[A_3(1)\cap A_3(2)\right].$$

$$\begin{aligned}1-p(C) &= p\left[A_1(2)/A_1(1)\right]\times p\left[A_1(1)\right]+p\left[A_2(2)/A_2(1)\right]\times p\left(A_2(1)\right]+p\left[A_3(2)/A_3(1)\right]\times p\left[A_3(1)\right]\\ &= \alpha_1(1)a_{11}+\alpha_2(1)a_{22}+\alpha_3(1)a_{33}=0,265\end{aligned}$$

Soit $p(C)=0,735$.

2. (a) Le système $\{A_1(n),A_2(n),A_3(n)\}$ étant complet d'après les hypothèses $\boxed{H_1}$ et $\boxed{H_2}$, donc d'après la formule de Bayes, on a pour tout $i\in[\![1,3]\!]$:

$$p\left[A_i(n+1)\right]=\sum_{j=1}^{3}p\left[A_i(n+1)/A_j(n)\right]\times p\left[A_j(n)\right].$$

Soit $\forall i\in[\![1,3]\!]$, $\alpha_i(n+1)=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\alpha_j(n)$ ce qui exprime l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(n+1)\\ \alpha_2(n+1)\\ \alpha_3(n+1)\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\alpha_1(n)\\ \alpha_2(n)\\ \alpha_3(n)\end{pmatrix}.$$

Soit en réécrivant toutes ces relations aux temps $t=n$, $t=n-1$ jusqu'à $t=2$:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(n)\\ \alpha_2(n)\\ \alpha_3(n)\end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix}\alpha_1(1)\\ \alpha_2(1)\\ \alpha_3(1)\end{pmatrix}.$$

(b) Calculons :

$$\begin{aligned}\det(M) &= \begin{vmatrix}0,3 & 0,1 & 0,6\\ 0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0,5 & -0,2 & -0,3\\ 0,2 & 0,4 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-0,2 & -0,3\\ 0,4 & 0\end{vmatrix}=0,12.\end{aligned}$$

Soit $\det(M)=0,12$.

(c) Cherchons le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda-0,3 & -0,1 & -0,6 \\ -0,5 & \lambda-0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda-0,2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -0,5 & \lambda-0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda-0,2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & \lambda-0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda-0,2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & \lambda+0,2 & 0,3 \\ -0,2 & -0,4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+0,2 & 0,3 \\ -0,4 & \lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Soit $\det(M) = (\lambda-1)(\lambda^2+0,2\lambda+0,12)$. Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique, elles sont donc 1, $-0,1+i\sqrt{0,11}$ et $-0,1-i\sqrt{0,11}$.

(d) M admet trois valeurs propres distinctes complexes, donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit P la matrice de passage de la base initiale à la base de vecteurs propres. On a donc

$$M = PDP^{-1} \text{ et } M^n = PD^nP^{-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

avec $D = \operatorname{diag}(1, \lambda, \overline{\lambda})$ ($\lambda = -0,1+i\sqrt{0,11}$). La première colonne de P est un vecteur propre associée à la valeur propre 1. Vérifions que le vecteur de composantes $(1,1,1)$ est vecteur propre associé à 1. Calculons :

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est bien du type :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix} \text{ et } M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

3. (a) L'application linéaire $X \mapsto PXP^{-1}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ étant continue (propriété des applications linéaires continues en dimension finie), alors comme $|\lambda| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} M^n = P \lim_{n\to\infty} \operatorname{diag}\left(1, \lambda^n, \overline{\lambda}^n\right) P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Or

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \end{pmatrix}.$$

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \end{pmatrix}$.

(b) En utilisant le résultat de la question 2. de la première partie précédente, on a la somme des éléments de chaque colonne de M^n est 1.

Posons $M^n = \left(m_{ij}^{(n)}\right)_{1\le i,j\le 3}$ et $L = (l_{ij})_{1\le i,j\le 3} = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$. On a alors, pour tout $j \in [\![1,3]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{3} m_{ij}^{(n)} = 1$, donc par passage à la limite on obtient : $\sum\limits_{i=1}^{3} l_{ij} = 1$. Ainsi par unicité de la limite $3a = 3a' = 3a'' = 1$, soit donc $a = a' = a'' = \dfrac{1}{3}$.

(c) Par continuité de l'application linéaire $X \mapsto X \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix} = \left(\lim_{n\to\infty} M^{n-1}\right) \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,45 \\ 0,35 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_1(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_2(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_3(n) = \dfrac{1}{3}$.

●●●●●●●●●●