# Devoir libre $n°02$
Correction

*N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.*

●●●●●●●●●

## Partie I

**1.** Soient $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda$ un nombre réel. On a :

$$\operatorname{tr}(A+\lambda B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+\lambda b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\lambda\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\operatorname{tr}(A)+\lambda\operatorname{tr}(B).$$

Donc $T$ est bien linéaire.

**2.** Posons $C=AB=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $D=BA=(d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, avec $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ et $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}$, donc :

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}d_{kk}=\operatorname{tr}(BA).$$

**3.** Si $M$ et $M'$ sont semblables, alors il existe $P$ inversible tel que $M'=P^{-1}MP$ et donc

$$\operatorname{tr}(M')=\operatorname{tr}(P^{-1}MP)=\operatorname{tr}(PP^{-1}M)=\operatorname{tr}(M).$$

**4.** On vérifie facilement que $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$, pour tout $(i,j,k,l)\in\mathbb{N}_n^4$.

## Partie II

**1.** Il est clair que $\Theta$ est non vide ( il contient l'application trace ), de plus si $\varphi$ et $\phi$ sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\varphi+\lambda\phi\in\Theta$. Donc $\Theta$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$.

**2.** (a) On sait que $E_{ij}E_{ii}=\delta_{ij}E_{ii}$ et donc

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\varphi(E_{ii}) &= =\varphi(E_{ij}E_{ii})=\varphi(E_{ii}E_{ij})\\ &= \varphi(\delta_{ii}E_{ij})=\varphi(E_{ij}).\end{aligned}$$

(b) De même $\varphi(E_{ii})=\varphi(E_{ij}E_{ji})=\varphi(E_{ji}E_{ij})=\varphi(E_{jj})$.

**3.** Soit $\varphi\in\Theta$. D'après 2.,

$$\varphi(E_{ij})=\begin{cases}0, & \text{si } i\neq j\\ cte, & \text{si } i=j.\end{cases}$$

Ainsi si $M=\sum_{1\leq i,j\leq n}m_{ij}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\varphi(A)=\sum_{i=1}^{n}m_{ii}\varphi(E_{ii})=\lambda\operatorname{tr}(M)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Conclusion : si $\varphi\in$ est un élément de $\Theta$, alors $\varphi$ et $\operatorname{tr}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\Theta$ est sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ de dimension 1 ; il est engendré par l'application trace.

## Partie III

**1.** Il est clair que $L$ est linéaire.

**2.** On trouve $L(E_{ij})=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}$.

**3.** On remarque que la famille $\{ E_{ij} \mid i \neq j \}$ engendre $\operatorname{Im} L$, et comme cette famille est libre ( sous-famille d'une famille libre), alors forme une base de $\operatorname{Im}(L)$. D'où $\operatorname{rg}(L) = \dim \operatorname{Im}(L) = n^2 - n$.
REMARQUE : $\operatorname{Im}(L)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices dont les éléments diagonaux sont nuls.

**4.** Soit $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $C' = P^{-1}CP$. Il suffit donc de prendre $X = PX'P^{-1}$ et $Y = PY'P^{-1}$.

**5.** Vérifions que $f$ est homothétie, en effet, soient $x$ et $y$ de $V$, alors il existe $\lambda_x$, $\lambda_y$ et $\lambda_{x+y}$ des scalaires tels que

$$f(x) = \lambda_x x,\ f(y) = \lambda_y y \text{ et } f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y).$$

Si $x$ et $y$ sont libres, la condition $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$ implique $\lambda_y = \lambda_x$, et si $y = \alpha x$, alors

$$f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_y y = \lambda_y \alpha x,$$

donc $\lambda_y = \lambda_x$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$, c'est-à-dire $f$ est une homothétie.

**6.** Il faut montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.
CAS $n = 2$ : Soit $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $C$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x$ et $f(x)$ sont colinéaires, d'après 5. $f$ est une homothétie de rapport $\lambda$. Mais $\operatorname{tr}(C) = 2\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et $C = 0$. Supposons $C \neq 0$, donc il existe $x \neq 0$ de $\in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, f(x))$ soit une base, donc $C$ est semblable à une matrice de la forme

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

et comme $\operatorname{tr}(C) = 0$, alors $\operatorname{tr}(C') = \beta = 0$, donc $C$ est semblable à la matrice $C'$ dont les éléments diagonaux sont nuls.
Établissons le résultat demandé en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice $C$. Si $C$ est taille 1, le résultat est triviale. Pour $n = 2$ on a montré que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.
Supposons la propriété établie au rang $n-1$. Soit $C$ une matrice carrée d'ordre $n$ de trace nulle et $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $C$. Montrons que $C$ est semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 1 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad N \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Si $C$ est matrice d'une homothétie alors $\operatorname{tr}(C) = 0$ permet de conclure $C = 0$. Sinon, il existe $x \in E$ tel que $x$ et $f(x)$ sont non colinéaires. En introduisant une base dont $x$ et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice $C$ est semblable à une matrice de la forme $B$, avec $\operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C) = 0$. Soit donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1}CP = B = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 1 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Par l'hypothèse de récurrence il existe $R \in \mathbf{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $U \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ à éléments diagonaux nuls vérifiant $R^{-1}NR = U$, alors la matrice $C' = (PQ)^{-1}C(PQ)$ où

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

a ses éléments diagonaux nuls et semblable à $C$.

**7.** Si $C = XY - YX$ alors $C$ est de trace nulle. Supposons que $C$ est de trace nulle, d'après 6. $C$ est semblable à une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont nuls, donc il $P$ inversible tel que $C = P^{-1}BP$ et d'après 6., il existe $C' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = DC' - C'D$ où $D$ est une matrice diagonale, ainsi

$$\begin{aligned} C &= P^{-1}BP = P^{-1}DC'P - P^{-1}C'DP \\ &= P^{-1}DPP^{-1}C'P - P^{-1}C'PP^{-1}DP \\ &= XY - YX \end{aligned}$$

avec $X = P^{-1}DP$ et $Y = P^{-1}C'P$.

•••••••••