

Devoir libre n°03
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives. Vérifions les axiomes des normes.

• Pour tout $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ ($d = \deg P$), $N_u(P) = \sum_{k=0}^d u_k |a_k| \geq 0$ et $N_u(0) = 0$.

• Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ tel que $N_u(P) = 0$. La somme définissant $N_u(P)$ étant une somme de termes positifs, on obtient que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}_d$, $u_k |a_k| = 0$. Comme de plus, $u_k \neq 0$, on en déduit que $a_k = 0$. Finalement, $P = 0$.

• Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ ($d = \deg P$) et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N_u(\lambda P) = \sum_{k=0}^d u_k |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^d u_k |a_k| = |\lambda| N_u(P)$.

• Soient $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{d'} b_k X^k$ avec $d \leq d'$. On pose $a_k = 0$ pour $k \in [d+1, d']$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}_{d'}$, $u_k |a_k + b_k| \leq u_k |a_k| + u_k |b_k|$. En faisant la somme on obtient alors que

$$N_u(P + Q) \leq N_u(P) + N_u(Q).$$

On a bien montré que N_u est une norme.

2. On suppose qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $N_u \leq C N_v$. Notons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit n un entier naturel, on sait que $N_u(X^n) = u_n$ et $N_v(X^n) = v_n$. On en déduit que $0 \leq u_n \leq C v_n$. Cela montre que $u_n = O(v_n)$.

On suppose maintenant que $u_n = O(v_n)$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout entier n , $\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq C$ et donc $u_n \leq C v_n$ car u et v sont à valeurs positives.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ on a alors

$$N_u(P) = \sum_{k=0}^d u_k |a_k| \leq \sum_{k=0}^d C v_k |a_k| = C N_v(P).$$

C'est-à-dire $N_u \leq C N_v$.

On en déduit que N_u et N_v sont équivalentes si et seulement si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

3. (a) $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Soit $t \in [0, 1]$,

$$|P(t)| = \left| \sum_{k=0}^d a_k t^k \right| \leq \sum_{k=0}^d |a_k| = N_e(P).$$

On en déduit que $N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \leq N_e(P)$. On peut donc prendre $K = 1$.

- (b) Montrons que les normes N et N_e ne sont pas équivalentes. Pour cela nous allons montrer qu'il n'existe pas de constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $N_e \leq CN$. Il suffit pour cela de construire une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ telle que $\frac{N_1(P_n)}{N(P_n)}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Considérons $P_n = (X - 1)^n$. Pour $t \in [0, 1]$, $|t - 1| \in [0, 1]$ et donc $|P_n(t)| = |t - 1|^n \in [0, 1]$. De plus, $|P_n(0)| = 1$ donc $N(P_n) = 1$.

Maintenant, par la formule du binôme de Newton, $P_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k (-1)^{n-k} X^k$. Cela nous donne

$$N_e(P_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k = 2^n.$$

Finalement, $\frac{N_e(P_n)}{N(P_n)} = 2^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Les normes N et N_e ne sont pas équivalentes.

4. (a) On utilise les formules d'interpolation de Lagrange. Comme $a_1, \dots, a_{d+1}$ sont deux à deux distincts, on sait qu'il existe des polynômes $L_1, \dots, L_{d+1}$ tels que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket^2$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$. Précisément pour tout $i \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

De plus on a $P = \sum_{i=1}^{d+1} P(a_i) L_i$ pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$.

- (b) On a vu à la question 3.(a) que pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, $N(P) \leq N_e(P)$. La propriété est donc aussi vraie sur $\mathbb{R}_d[X]$.

En utilisant ce qui précède,

$$N_e(P) = N_e \left(\sum_{i=1}^{d+1} P(a_i) L_i \right) \leq \sum_{i=1}^{d+1} |P(a_i)| N_e(L_i) \leq KN(P)$$

où $K = \sum_{i=1}^{d+1} N_e(L_i)$ qui est une constante qui ne dépend pas de P . On a bien $N_e \leq KN$. Les deux normes sont équivalentes.

• • • • •