

Devoir libre n°04
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



Exercice 1 :

- f est une fonction 1-lipschitzienne, donc elle est uniformément continue sur I .
- On a $f(a) - a \geq 0$ et $f(b) - b \leq 0$ et comme f est continue, alors d'après le théorème de valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
Supposons qu'il existe deux points fixes α et β , alors l'inégalité

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta|$$

conduit à une contradiction.

- La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $I = [a, b]$ puisque $f(I) \subset I$, et comme I est un compact, donc on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| < |x_n - \alpha|,$$

donc la suite $(|x_n - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et est minorée (par 0), donc elle converge. La suite $(|x_{\varphi(n)} - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|h - \alpha|$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = |h - \alpha|$.

- Par continuité, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_{n-1}) - \alpha| = |f(h) - \alpha|$, et donc $|f(h) - \alpha| = |h - \alpha|$ et comme $|f(h) - \alpha| = |f(h) - f(\alpha)| < |h - \alpha|$, alors nécessairement $h = \alpha$.

Exercice 2 :

- La somme est bien définie car, pour tout polynôme $f = \sum_{i=0}^{\deg P} a_i X^i$, si $n > \deg f$ alors $f^{(n)}(0) = 0$

$$\text{et donc } \|f\| = \sum_{n=0}^{\deg f} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{i=0}^{\deg P} |a_i|.$$

On vérifie facilement les trois propriétés de la norme.

- (a) Soit d l'application considérée, la linéarité est évidente, puisque pour tout $f \in E$, $|d(f)| = |f^{(n)}(0)| \leq n! \|f\|$. On a donc la continuité de d et l'inégalité $\|d\| \leq n!$.

Pour $f(x) = x^n$, on a $\|f\| = 1$ et $d(f) = n!$ ce qui permet d'affirmer que $\|d\| = 1$.

- (b) Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

On a $\|f_n\| = \frac{1}{n}$ et $\|f'_n\| = 1$. Si on pose $\varphi(f) = f'$, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 alors que $(\varphi(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, puisque $\|\varphi(f_n)\| = 1$ ce qui prouve que l'application linéaire φ n'est pas continue.

3. On sait qu'une intersection de fermés est un fermé, or

$$F = \{g \in E / f \prec g\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

où $F_n = \{g \in E / f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0)\}$. F_n est un fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue donc F est un fermé.

On fait de même pour $F' = \{g \in E / g \prec f\}$.

4. $[f, g]$ est un fermé car il est intersection de deux fermés grâce à la question 4. Soit $(h_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $[f, g]$, on écrit $h_p(x) = a_0^p + \dots + a_{n_p}^p x^{n_p}$ on sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_n^p \leq b_n$ où a_n et b_n sont les coefficients de f et g .

Si on pose $q = \max(\deg f, \deg g)$ alors on peut choisir $n_p = q$ pour tout p (quitte à écrire des coefficients nuls pour le polynôme h_p). On utilise alors le fait que $[a_0, b_0] \times \dots \times [a_q, b_q]$ est compact et que $(a_0^p, \dots, a_q^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de ce compact. On pourra alors extraire une suite $(a_0^{\varphi(p)}, \dots, a_q^{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, la suite $(h_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ sera convergente dans E , ce qui montre que $[f, g]$ est un compact.

5. On sait déjà que $[0, f_p]$ est un compact pour tout $p \in \mathbb{N}$. Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} [0, f_p]$. On pose $A = \{p \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N} / h_n \in [0, f_p]\}$ et on distingue deux cas :

- A est fini : Si $P = \max(A)$ alors $\{h_n\} \subset \bigcup_{p=0}^P [0, f_p]$. En effet, si $q > P$, alors $\nexists n \in \mathbb{N}$ tel que

$$h_n \in [0, f_q].$$

Or $\bigcup_{p=0}^P [0, f_p]$ est un compact, on peut donc extraire une suite convergente de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- A est infini : On peut extraire de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(h_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $h_{\varphi(n)} \in [0, f_{\psi(n)}]$ où ψ est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} strictement croissante. On aura alors $h_{\varphi(n)}$ tend vers 0.

Exercice 3 :

1. f est continue comme quotient de deux fonctions continues sur E .

2. Si $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{1}{2}$. Donc $f(E) \subset \overline{B}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Inversement, soit $y \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. On cherche à résoudre l'équation $y = f(x)$ avec $x \in E$.

Si une solution existe, on a $y = \frac{x}{1 + \|x\|^2}$ et donc y et x sont colinéaires. Posons donc $x = \lambda y$. Pour

$y = 0$, $f(0) = 0$, et pour y non nul, chercher un antécédent à y revient à chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda y) = y = \frac{\lambda y}{1 + \|\lambda y\|^2}$ ce qui est équivalent à $\|y\|^2 \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Or cette dernière equation a une

solution car $\Delta = 1 - 4\|y\|^2 \geq 0$. Donc $\overline{B}\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset f(E)$, et finalement $f(E) = \overline{B}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

