Devoir libre $n°05$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●●

1. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$. Si $x \in N_k(\lambda)$, alors $(f-\lambda \boldsymbol{i})^k(x) = 0$ et donc $(f-\lambda \boldsymbol{i})^{k+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in N_{k+1}(\lambda)$. La suite $(N_k(\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soient $x, y \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^k$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, alors il existe des entiers k_1 et k_2 tels que $x \in \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^{k_1}$ et $y \in \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^{k_2}$, donc $x, y \in \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^{\max(k_1,k_2)}$ et par conséquent

$$x + \alpha y \in \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^{\max(k_1,k_2)} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^k.$$

D'où $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^k$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si λ est une valeur propre de f, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ et donc $x \in \ker(f-\lambda \boldsymbol{i}) \subset F_\lambda$ et donc $F_\lambda \neq \{0\}$.
Inversement, soit $x \in F_\lambda$ non nul et donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^k$. Considérons l'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{N} | x \in \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^k\}.$$

Cette ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, soit donc $k_0 = \inf(A)$. Le vecteur non nul $y = (f-\lambda \boldsymbol{i})^{k_0-1}(x)$ vérifie $(f-\lambda \boldsymbol{i})(y) = 0$ et donc y est un vecteur propre de f.
Si $x \in F_\lambda$, alors il existe un entier k tel que $(f-\lambda \boldsymbol{i})^k(x) = 0$, donc

$$(f-\lambda \boldsymbol{i})^k(f(x)) = f\left((f-\lambda \boldsymbol{i})^k(x)\right) = f(0) = 0,$$

d'où $f(x) \in F_\lambda$.

3. Soit $x_1, x_2, ..., x_p$ des vecteurs de E tels que $x_i \in F_{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1,p]\!]$ et $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$. Pour chaque i il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \in \ker(f-\lambda_i \boldsymbol{i})^{k_i}$. Considérons alors les polynômes $P_i = (X-\lambda_i)^{k_i}$, $1 \leq i \leq p$, qui sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de décomposition des noyaux :

$$\sum_{i=1}^{p} \ker(f-\lambda_i \boldsymbol{i})^{k_i} = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(f-\lambda_i \boldsymbol{i})^{k_i}$$

et donc x_i est nul pour chaque $i \in [\![1,p]\!]$. Ainsi la somme $\sum_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$ est directe.

4. Soit $k \geq n(\lambda)$. On peut écrire $k = n(\lambda) + i$ avec $i \in \mathbb{N}$. Soit x un élément quelconque de $N_{k+1}(\lambda)$. On a :

$$0 = (f-\lambda \boldsymbol{i})^{k+1}(x) = (f-\lambda \boldsymbol{i})^{n(\lambda)+i+1}(x) = (f-\lambda \boldsymbol{i})^{n(\lambda)+1}\left((f-\lambda \boldsymbol{i})^i(x)\right).$$

Donc $(f-\lambda \boldsymbol{i})^i(x) \in N_{n(\lambda)+1}(\lambda) = N_{n(\lambda)}(\lambda)$. On a donc

$$0 = (f-\lambda \boldsymbol{i})^{n(\lambda)}((f-\lambda \boldsymbol{i})^i(x)) = (f-\lambda \boldsymbol{i})^{n(\lambda)+i}(x) = (f-\lambda \boldsymbol{i})^k(x).$$

On vient de démontrer que $x \in N_{k+1}(\lambda) \Rightarrow x \in N_k(\lambda)$ et donc $N_{k+1}(\lambda) \subset N_k(\lambda)$. Comme on sait déjà que $N_k(\lambda) \subset N_{k+1}(\lambda)$, on a $N_k(\lambda) = N_{k+1}(\lambda)$.
On a donc finalement montré que si $N_{n(\lambda)}(\lambda) = N_{n(\lambda)+1}(\lambda)$ alors, pour tout $k \geq n(\lambda)$, $N_k(\lambda) = N_{n(\lambda)}(\lambda)$ et donc

$$F_\lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^k = \bigcup_{k=0}^{n(\lambda)} \ker(f-\lambda \boldsymbol{i})^k = N_{n(\lambda)}(\lambda).$$

5. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{C}[X]$ définie par $f(P) = P'$. On a $f(1) = 0$, donc 0 est une valeur propre de f, de plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(P) = P^{(k)}$. Donc $(N_k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante puisque $X^k \in N_{k+1}(0)$ et $X^k \notin N_k(0)$. Donc 0 est une valeur propre d'indice infini.

6. Dans ce cas l'ensemble $\{\deg(P) | P(u) = 0 \text{ et } P \in \mathbb{C}[X] \text{ non nul}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément que l'on notera d. Soit π_f un polynôme annulateur de f de degré d que l'on peut supposer de plus unitaire afin de garantir l'unicité.
Soit maintenant un polynôme annulateur P quelconque de f. Par division euclidienne,

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{C}[X],\, P = Q \times \pi_f + R \text{ avec } \deg(R) < d.$$

De plus $R(f) = P(f) - Q(f) \circ \pi_f(f) = 0$. Comme R annule f et est de degré strictement inférieur au degré minimal d, $R = 0$. Ce qui prouve bien que $P = Q \times \pi_f$.
Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$$

Supposons qu'il existe un polynôme P non nul, annulant f. Posons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Comme $P(f) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{d} a_k f^k(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, en particulier $\sum_{k=0}^{d} a_k f^k(X^j) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k j^k\right) X^j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc $\sum_{j=0}^{d} a_k j^k = 0$. Donc le polynôme P admet une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul ce qui est absurde.

7. (a) Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, puis $\pi_f(f)(x) = \pi_f(\lambda)x = 0$, d'où $\pi_f(\lambda) = 0$. Donc l'ensemble des valeurs propres de f est une partie de l'ensemble des racines de π_f, qui est fini, donc $\operatorname{Sp} f$ est fin.

(b) Soit λ une valeur propre de f, donc c'est une racine de π_f. Notons r_λ l'ordre de multiplicité de λ dans π_f. Le polynôme minimal π_f s'écrit donc sous la forme $\pi_f = (X - \lambda)^{r_\lambda} Q$ où Q est un polynôme unitaire, premier avec $X - \lambda$. Supposons $\ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda} \subsetneq \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda + 1}$. Considérons alors le polynôme $P = (X - \lambda)^{r_\lambda + 1} Q$, qui est annulateur de f. D'après les théorèmes de décomposition des noyaux,

$$E = \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda} \oplus \ker Q(f) = \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda + 1} \oplus \ker Q(f).$$

Mais cette égalité est en contradiction avec $\ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda} \subsetneq \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda + 1}$. Ainsi, λ est une valeur propre d'indice fini.

(c) Si f possède un polynôme minimal π_f, alors les valeurs propres de f sont exactement les racines de π_f. En effet, soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, puis $\pi_f(f)(x) = \pi_f(\lambda)x = 0$, d'où $\pi_f(\lambda) = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\pi_f(\lambda) = 0$, alors $\pi_f = (X - \lambda)Q$ avec $\deg(Q) < \deg(\pi_f)$, donc $Q(f) \neq 0$. Alors $\{0\} \neq \operatorname{Im} Q(f) \subset \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})$, ce qui implique que λ est une valeur propre de f.
En conclusion, si f possède un polynôme minimal, alors l'ensemble des valeurs propres de f est non vide car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et c'est exactement l'ensemble de racines de π_f. D'où

$$\pi_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda)^{n(\lambda)}$$

où $n(\lambda)$ est l'ordre de multiplicité de λ qui coïncide avec l'indice de λ (d'après la question **(b)**)

(d) D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{n(\lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} N_{n(\lambda}(\lambda)$.

Comme λ est d'indice fini, alors $N_{n(\lambda)} = F_\lambda$ et donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} F_\lambda$.

• • • • • • • • •