

Devoir libre n°06

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

Première partie

1. La linéarité de f résulte de celle de u . Il est clair que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(A)$, d'où $\text{rg}(f) = 1$.
2. Notons $\text{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f . Supposons $\text{Sp}(f) \neq \emptyset$
Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$, alors il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ ou encore $u(x)(\lambda - u(A)) = 0$.
 - Si $u(x) = 0$, alors $f(x) = 0$, donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé $E_0 = \ker u$.
 - Si $u(x) \neq 0$, alors $\lambda = u(A)$ et on a $f(A) = u(A)A$, le vecteur propre associé à $u(A)$ est donc A , d'où le sous-espace propre associé $E_{u(A)} = \text{Vect}(A)$.
3. On a $\text{rg } f = 1$, c'est-à-dire $\dim \ker f = n - 1$, donc 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 1$, d'où f est diagonalisable si et seulement si $u(A) \neq 0$.
4. (a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et soit $B \in E$ tel que $\text{Im } g = \text{Vect}(B)$, d'où :

$$\forall x \in E, \exists l_x \in \mathbb{R} : g(x) = l_x B$$

On vérifie facilement que l'application $v : x \mapsto l_x$ est une forme linéaire sur E , non nulle car l'endomorphisme g est non nul. Donc on a : $\forall x \in E, g(x) = v(x)B$

- (b) On a $\text{rg } g = 1$ ou encore $\dim \ker g = n - 1$, et on a aussi $g(B) = v(B)B$ et par conséquent g est diagonalisable si et seulement si $v(B) \neq 0$ ce qui est équivalent à $g^2 \neq 0$ à cause de l'égalité $g^2(B) = (v(B))^2 B$.
- (c) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de $\ker g$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, B)$ est une base de E et dans cette base la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = v(B) \neq 0$.

- (d) Dans ce cas on a $g(B) \neq 0$, donc on complète B en une base $(B, e_2, \dots, e_{n-1})$ de $\ker g$, considérons ensuite un vecteur $e_n \in E : g(e_n) = v(e_n)B, v(e_n) \neq 0$.
Donc $(B, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

5. Soient M et N deux matrices de rang 1. Supposons que M et N sont semblables, alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(R)$ tel que $M = P^{-1}NP$. D'où

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(P^{-1}NP) = \text{tr}(NPP^{-1}) = \text{tr}(N).$$

Inversement, si $\text{tr } M = \text{tr } N$ et si $M^2 \neq 0$, alors il existe $P \in \mathbf{GL}_n(R)$ tel que $M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \text{tr } M & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P$
et la condition $\text{tr } M = \text{tr } N$ entraîne que $N^2 \neq 0$. Donc il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(R) : N = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \text{tr } M & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$.

D'où $Q^{-1}PM(Q^{-1}P)^{-1} = N$, donc M et N sont semblables.

Si $M^2 = N^2 = 0$ les deux matrices M et N sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

6. On a $\text{tr } M = \text{tr } N = 0$, donc les deux matrices M et N sont semblables.

Deuxième partie

- Notons g la restriction de h à $\ker u$, $\forall x \in \ker u$, $g(x) = u(A)x$, donc g est homothétie de rapport $u(A)$. D'autre par si $x \in \ker h$, alors $u(A)x = u(x)$ et donc $x \in \text{Vect}(A)$, d'où $\ker h = \text{Vect}(A)$.
- Pour tout $x \in E$, $u \circ h(x) = u(A)u(x) - u(x)u(A) = 0$, donc $\text{Im } h \subset \ker u$ et comme $\dim \text{Im } h = n - 1$ alors $\text{Im } h = \ker u$.
- Supposons que $\text{Sp}(h) \neq \emptyset$.
Soit $\lambda \in \text{sp}(h)$. Alors il existe $x \neq 0 : u(A)x - u(x)A = \lambda x$, c'est-à-dire $(u(A) - \lambda)x = u(x)A$.
• Si $\lambda \neq u(A)$, alors $x \in \text{Vect}(A)$ et on a aussi $h(A) = 0$. Donc $\lambda = 0$ et $E_0 = \text{Vect}(A)$.
• Si $\lambda = u(A)$, alors $u(x) = 0$, d'où $E_{u(A)} = \ker u$.
Si $\dim E$ est de dimension finie, h est diagonalisable car $\dim E_0 = 1$ et $\dim E_{u(A)} = n - 1$.
- (a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$ une solution non nulle de l'équation (1). Alors $x \in \text{Vect}(A)$, d'autre part pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\alpha(\lambda A) - u(\lambda A)A = 0$$

Donc si $\alpha \neq u(A)$ l'équation en question n'admet que la solution nulle et si $\alpha = u(A)$ l'espace de solutions est la droite vectorielle $\text{Vect}(A)$.

- Si x_0 est solution de (2), alors $x \in E$ est solution de (2) si et seulement si $x - x_0$ est solution de (1). Donc l'équation (2) admet des solutions non triviales si et seulement si $\alpha = u(A)$.

D'autre part si x est solution de (2), alors $u(A)x - u(x)A = B$ c'est-à-dire $x \in F = \frac{1}{u(A)}B + \text{Vect}(A)$.

Réciproquement, soit $y \in F$, $y = \frac{1}{u(A)}B + \mu A$.

$$u(A)y - u(y)A = B \iff B + \mu u(A)A - \frac{u(B)}{u(A)}B - \mu u(A)A = B.$$

Donc nécessairement, $u(B) = 0$. D'où :

- Si $\alpha \neq u(A)$, l'équation (2) admet une seule solution.
 - Si $\alpha = u(A)$, et $u(B) = 0$, l'espace des solutions de l'équation (2) est l'espace affine $\frac{1}{u(A)}B + \text{Vect}(A)$.
- (a) Comme $\text{tr}(^t A - A) = 0$ et $\alpha = \text{tr}(A)$, alors l'espace de solutions de l'équation $\text{tr}(A)x - \text{tr}(x)A = ^t A - A$ est $\frac{1}{^t A} (^t A - A) + \text{Vect}(A)$.
 - (b) Soit a la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $a(t) = \sin(t)$. On cherche d'abord une solution particulière f_0 , si f_0 existe alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda \sin(x)$ en remplaçant dans l'équation (4) on trouve $\lambda = -2$, d'où $f_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda \sin(x)$, et comme $u(a) = 2 \neq 1$ (1 la valeur de α) l'équation (4) admet une solution unique, c'est $x \mapsto f_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda \sin(x)$

•••••