Devoir libre $n°07$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

1. Soit $x = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (u - \lambda \mathrm{id}_E)^i(a) \in F$. On a

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i u\left[(u-\lambda \mathrm{id}_E)^i(a)\right] && (1)\\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (u-\lambda \mathrm{id}_E)(u-\lambda \mathrm{id}_E)^i(a) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \lambda (u-\lambda \mathrm{id}_E)^i(a) && (2)\\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_i (u-\lambda \mathrm{id}_E)^{i+1}(a) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \lambda (u-\lambda \mathrm{id}_E)^i(a) && (3) \end{aligned}$$

car $(u-\lambda \mathrm{id}_E)^m = 0$. Donc $u(x) \in F$ et par conséquent $u(F) \subset F$.

D'autre part, soit $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (u-\lambda \mathrm{id}_E)^i(a) = 0$. Appliquons $(u-\lambda \mathrm{id}_E)^{m-1}$ à l'égalité précédente, on obtient

$$\alpha_0 (u - \mathrm{id}_E)^{m-1}(a) = 0$$

et donc $\alpha_0 = 0$.
On applique une autre fois $(u-\lambda \mathrm{id}_E)^{m-2}$, on obtient $\alpha_1 (u-\lambda \mathrm{id}_E)^{m-1}(a) = 0$ puis $\alpha_1 = 0$. De proche en proche on obtient $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$. Donc la famille $(a, (u-\lambda \mathrm{id}_E)(a), ..., (u-\lambda \mathrm{id}_E)^{m-1}(a))$ est libre. D'où $\dim F = m$.

2. Si $\dim E = 1$, $E = \mathrm{Vect}(e)$ avec $e \neq 0$. Le résultat est donc trivial.

3. On suppose que u n'est pas inversible.

(a) On a $u(E) \subset F$, donc $u(F) \subset F$. Alors on peut considérer l'endomorphisme v induit par u sur F. Appliquons l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme v. Donc il existe M_j ($1 \leq j \leq k$) des sous-espaces cycliques tels que $F = \bigoplus_{j=1}^{k} M_j$. Les M_j étant choisis de telle sorte que $\dim M_j \leq \dim M_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq k-1$.

(b) i. Supposons S est non vide. On a $u(y) \in F$ puisque $u(E) \subset F$. Donc il existe des scalaires α_{lj} tels que :

$$\begin{aligned} u(y) &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{m_j} \alpha_{lj} (u-\lambda_j \mathrm{id}_E)^l(a_j) && (4)\\ &= \sum_{j\in S} \sum_{l=0}^{m_j} \alpha_{lj} (u-\lambda_j \mathrm{id}_E)^l(a_j) + \sum_{j\notin S} \sum_{l=0}^{m_j} \alpha_{lj} (u-\lambda_j \mathrm{id}_E)^l(a_j) && (5)\\ &= \sum_{j\in S} \alpha_{0j} a_j + \sum_{j\in S} \sum_{l=1}^{m_j} \alpha_{lj} u^l(a_j) + \sum_{j\notin S} \sum_{l=0}^{m_j} \alpha_{lj} (u-\lambda_j \mathrm{id}_E)^l(a_j) && (6) \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, $\sum_{j\in S} \sum_{l=1}^{m_j} \alpha_{lj} u^l(a_j) = u\left(\sum_{j\in S} \sum_{l=1}^{m_j} \alpha_{lj} u^{l-1}(a_j)\right) \in u(F)$ et pour le troisième terme il suffit de montrer que $a_j \in u(F)$ pour tout $j \notin S$, car si $a_j \in u(F)$, c'est-à-dire $a_j = u(b_j)$

pour un certain $b_j \in F$, alors

$$(u - \lambda_j \mathrm{id}_E)^l (a_j) = u\left((u - \lambda_j \mathrm{id}_E)^l (b_j)\right) \in u(F).$$

Soit $j \notin S$, montrons donc que $a_j \in u(F)$. On a :

$$\begin{aligned} a_j &= -\lambda_j^{-1}(u - \lambda_j \mathrm{id}_E)(a_j) + \lambda_j^{-1} u(a_j) && (7)\\ &= -\lambda_j^{-1}(u - \lambda_j \mathrm{id}_E)\left(-\lambda_j^{-1}(u - \lambda_j \mathrm{id}_E)(a_j) + \lambda_j^{-1} u(a_j)\right) + \lambda_j^{-1} u(a_j) && (8)\\ &= (-\lambda_j)^{-2}(u - \lambda_j \mathrm{id}_E)^2(a_j) - \lambda_j^{-2}(u - \lambda_j \mathrm{id}_E) u(a_j) + \lambda_j^{-1} u(a_j) && (9)\end{aligned}$$

On applique une autre fois a_j dans la formule précédente et de proche en proche, on obtient :

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{l=0}^{m_j-1} (-1)^l \lambda_j^{-l-1} (u - \lambda_j \mathrm{id}_E)^l u(a_j) && (10)\\ &= u\left(\sum_{l=0}^{m_j-1} (-1)^l \lambda_j^{-l-1} (u - \lambda_j \mathrm{id}_E)^l (a_j)\right) && (11)\end{aligned}$$

car $(u - \lambda_j \mathrm{id}_E)^{m_j}(a_j) = 0$.

Donc $u(y) - \sum_{j \in S} \alpha_{oj} a_j \in u(F)$.

ii. Si S est vide, la même technique faite à a_j montre que $u(y) \in u(F)$.

(c) Si $z \in F$ tel que $u(z) = u(y)$, alors $z - y \neq 0$ et $z - h \notin F$ sinon y serait dans F. Donc $\mathrm{Vect}(y - z)$ est un supplémentaire de F, d'où $E = F \oplus \mathrm{Vect}(y - z)$.

(d) Soit $x \in H = \bigoplus_{j \in S, j \leq p-1} M_j$, donc il existe des scalaires β_{kj} tels que $x = \sum_{j \in S, j \leq p-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{kj} u^k(a_j)$, donc $u(x) = \sum_{j \in S, j \leq p-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{kj} u^{k+1}(a_j) \in H$ et $u(H) \subset H$.

De plus $u^{m_p}(x) = \sum_{j \in S, j \leq p-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{kj} u^{k+m_p}(a_j) = 0$ puisque $u^{l+m_p}(a_j) = 0$, d'où $u^{m_p}(H) = \{0\}$.

Puisque $y - z = \alpha_p t$, alors $u(y - z) = \alpha_p u(t) = \sum_{j \in S} \alpha_j a_j$, donc

$$u(t) = \sum_{j \in S} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} a_j = \sum_{j \in S, j \neq p} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} + a_p = \sum_{j \in S, j \leq p-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} + a_p.$$

Donc $u(t) \notin H$, car sinon a_p serait dans H ce qui est absurde.
Comme $u(t) \in H \oplus M_p$, alors il suffit de montrer que la famille $\left(u^i(t)\right)_{1 \leq i \leq m_p}$ est libre. En effet, soit $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{m_p}$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^i(t) = 0$, donc

$$0 = \sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^{i-1}\left(\sum_{j \in S} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} a_j\right) = \sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j \in S, j \leq p-1} \beta_i u^{i-1}\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_p} a_j\right) + \sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^{i-1}(a_p),$$

le premier terme est dans H, le second est dans M_p, donc $\sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^{i-1}(a_p) = 0$ ce qui implique $\beta_i = 0$ pour $i = 1, 2, ..., m_p$. Donc

$$H \oplus M_p = H \oplus \mathrm{Vect}\left(u(t), u^2(t), ..., u^{m_p}(t)\right).$$

(e) On a $t \notin F$ car $y \notin F$, donc $E = F \oplus \mathrm{Vect}(t)$. D'autre part $F = \bigoplus_{j \neq p} M_j \oplus M_p$, d'où :

$$E = \bigoplus_{j \neq p} M_j \oplus M_p \oplus \mathrm{Vect}(t) = \bigoplus_{j \neq p} M_j \oplus \mathrm{Vect}(t, u(t), ..., u^{m_p}(t))$$

4. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, alors u admet au moins une valeur propre λ. Donc $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$ est non inversible, donc il suffit de considérer l'endomorphisme v.

5. On a $u(e_1) = e_3$, $u^2(e_1) = u(e_3) = e_4$, $u^3(e_1) = u(e_4) = 0$, $u(e_2) = e_1$, $u^2(e_2) = u(e_1) = e_3$, $u^3(e_2) = e_4$, d'où :

$$\mathbb{C}^5 = \mathrm{Vect}(e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2)) \oplus \mathrm{Vect}(e_5).$$

••••••••••