Devoir libre $n°09$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Partie I : deux exemples

1. Cas d'une suite constante

(a) D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

(b) On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = 1$.

(c) Les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

2. Cas d'une suite géométrique

(a) La formule du binôme indique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}(z+1)^n$$

(b) i. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Pour $|z| < 1$ ce terme admet une limite. $\sum(a_n)$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

ii. On a $\left|\dfrac{z+1}{2}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{2} < 1$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

(c) i. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle).

ii. Si $z = -2$ alors $a_n^* = (-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

iii. $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raion $r = \dfrac{e^{i\theta}+1}{2} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}$. Comme $\theta \in]0,\pi[$, $|r| \in]0,1[$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* = \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{ie^{\frac{-i\theta}{2}}}{\sin(\frac{\theta}{2})} = 1 + i\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Partie II : Étude du procédé de sommation

1. Comparaison des convergences des deux suites.

(a) i. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

ii. Par croissance comparées, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$$

(b) q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une suite finie de suites de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k \geq q,\ |a_k| \leq \varepsilon/2$. La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |S_q(n,a)| \leq \varepsilon/2$. On a alors

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| = \left| S_q(n,a) + \frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \leq 2^n$, on a finalement

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| \leq \varepsilon$$

et on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$$

(d) On a

$$a_n^* - l = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l)$$

et on se ramène au cas précédent ($a_n - l \to 0$). Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$$

(e) Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2. Comparaison des convergences des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$.

(a) Un calcul au brouillon (non reporté) donne

$$U_0 = S_0,\ U_1 = 2S_0 + S_1,\ U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0,\ U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$$

(b) i. On peut donc supposer que

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$$

ii. La formule précédente est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie jusqu'au rang $n-1$. On remarque que

$$U_n = 2^n T_n = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k+1}\right)S_k + S_n$$

Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on a donc

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}\right)S_k + S_n$$

La formule $\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ permet alors de montrer le résultat au rang n.

(c) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et on note S sa somme. On a donc $S_n \to S$ quand $n\to+\infty$. Avec la question précédente, on a

$$U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} - S_1$$

Comme $S_{n+1}\to S$, la question $II.1$ indique que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = S$$

ce qui donne $\dfrac{U_{n-1}+S_1}{2^n}\to S$ ou encore $T_{n-1}=\dfrac{U_{n-1}}{2^{n-1}}\to 2S$. La série $\sum(a_n^*)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

(d) Si $a_n=(-2)^n$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ diverge alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n^*$ converge. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n^*$ n'ont donc pas toujours même nature.

••••••••••