Devoir libre $n°10$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sin x + \sum_{k=1}^{n} 2\sin x \cos 2kx &= \sin x + \sum_{k=1}^{n} (\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x) \\ &= \sin x + (\sin(2n+1)x - \sin x) = \sin(2n+1)x. \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \in]0,\pi[$ alors $\sin x \neq 0$ et donc :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}.$$

(b) D'après le question précédente,

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \pi + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \sin 2kx\mathrm{d}x = \pi.$$

(c) Toujours d'après ce qui précède, on a $\displaystyle\int_0^\pi x^2\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi x^2\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi x^2 \sin 2kx\mathrm{d}x$. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin 2kx\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2k^2}$, d'où :

$$\int_0^\pi x^2\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{k^2}$$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est bien définie et continue (par prolongement en 0) sur $[0,+\infty[$, donc $\forall x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ existe. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

D'une part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, car $\left|\dfrac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\mapsto\infty} F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ existe, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

3. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Une simple intégration par parties donne :

$$I_n = \int_0^b f(t)\sin nt\mathrm{d}t = \left[f(t)\Big(-\frac{\cos nt}{n}\Big)\right]_0^b - \int_0^b f'(t)\left(-\frac{\cos nt}{n}\right)\mathrm{d}t.$$

Donc

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{1}{n}\left|\int_0^b f'(t)\ \cos nt\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2M}{n} + \frac{1}{n}\int_0^b |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

où $M = \sup_{x\in[0,b]} |f(x)|$. Par encadrement il vient sans difficulté

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

(b) Comme g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,b]$, alors par opération f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0) = f(0),$$

donc f est continue en 0.

D'autre part, f est dérivable sur $]0,b]$ et $\forall x \in]0,b]$, $f'(x) = \dfrac{xg'(x)-g(x)+g(0)}{x^2}$. Comme g est classe $\mathscr{C}^2$, alors

$$g(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + x^2\varepsilon_1(x)$$

et

$$g'(x) = g'(0) + xg''(0) + x\varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. D'où $f'(x) = \frac{1}{2}g''(0) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)$, donc $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}g''(0)$. D'après le théorème de prolongement d'une dérivée[1], f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}g''(0)$. De plus f' est continue en 0 et finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,b]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
K_n - Wg(0) &= \int_0^b g(x)\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} g(0)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^b g(x)\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} g(0)\frac{\sin nt}{t}\mathrm{d}t \quad (\text{ poser } x = nt\ ) \\
&= \int_0^b \frac{g(x)-g(0)}{x}\sin nx\mathrm{d}x - \int_b^{+\infty} g(0)\frac{\sin nt}{t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x - g(0)\int_{nb}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \quad (\text{ poser } u = nt\ )
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Riemann, la question **3.3a.** et puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\int_{nb}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = 0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente. D'où :

$$\lim_{n\to\infty} K_n = Wg(0).$$

4. (a) Par la relation de Chasles on a :

$$\int_0^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

Utilisons le changement de variable $t = \pi - x$ dans la deuxième intégrale :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} h(\pi-t)\frac{\sin(2n+1)(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\pi-t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

D'où

$$\int_0^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h(x)+h(\pi-x))\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

1. Soit I un intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet en a une limite finie l. Alors, f est dérivable en a et f' est continue en a avec $f'(a) = l$.

(b) Il est clair que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$g'(x) = (h'(x) - h'(\pi - x))\frac{x}{\sin x} + (h(x) + h(\pi - x))\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

et

$$g''(x) = (h''(x)+h''(\pi-x))\frac{x}{\sin x}+2(h'(x)-h'(\pi-x))\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}+(h(x)+h(\pi-x))\frac{x - \sin 2x + x\cos^2 x}{\sin^3 x}.$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = h(0) + h(\pi) = g(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = h'(0) - h'(\pi)$ et

$$\lim_{x\to 0^+} g''(x) = \frac{1}{3}\left(h(0) + h(\pi)\right) + h''(0) + h''(\pi).$$

Donc, d'après le théorème de prolongement d'une dérivée, g est deux fois dérivable en 0 et que ces dérivées sont continues en 0. Donc g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c)

$$\begin{aligned}
L_n - W.(h(0)+h(\pi)) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h(x) + h(\pi - x))\,\frac{x}{\sin x}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} (h(0)+h(\pi))\,\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^{+\infty} g(0)\frac{\sin(2n+1)t}{t}\mathrm{d}t,\ \ (\text{ poser } x = (2n+1)t\ ) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{g(x)-g(0)}{x}\right]\sin(2n+1)x\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(0)\frac{\sin(2n+1)t}{t}\mathrm{d}t\ \ (\text{ poser } t = (2n+1)x\ ) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)-g(0)}{x}\sin(2n+1)x\mathrm{d}x - g(0)\int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u,\ \ u = (2n+1)t
\end{aligned}$$

D'après la question **3.3b.**, la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc par le lemme de Riemann $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)-g(0)}{x}\sin(2n+1)x\mathrm{d}x = 0$.
De plus $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = 0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente. D'où :

$$\lim_{n\to\infty} L_n = W(h(0) + h(\pi)).$$

5. (a) Si on prend $h(x) = 1$ dans la question **4.4c.**, on obtient

$$\pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = W(h(0)+h(\pi)) = 2W,$$

d'où :

$$W = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

(b) D'après la question 1, on a :

$$\int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{k^2}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\pi \frac{x^2}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{k^2}$, mais avec la fonction $h(x)=\dfrac{x^2}{\pi}$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{x^2}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = W(h(0)+h(\pi)) = \frac{\pi^2}{2}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Des intégrations par parties successives donne $\displaystyle\int_0^\pi x^4\cos(2kx)\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{k^2}-\frac{3\pi}{2k^4}$. En utisant l'égalité de la question 1, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{x^4}{2}\left(\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}-1\right) = \pi^3\sum_{k=1}^{n} - \frac{3\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}$$

D'où, par passage à la limite :

$$W\frac{\pi^4}{2}-\frac{\pi^5}{10}=\frac{\pi^5}{6}-\frac{3\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}$.

• • • • • • • • •