Devoir libre $n^\circ 11$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

1. (a) Il est clair que le domaine de définition de F est $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.

(b) On sait que

$$\begin{aligned}\sin^2(\pi x)-(\pi x)^2 &= \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\pi x-2\pi^2x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-2\pi^2x^2-1+2\pi^2x^2-\frac{2}{3}\pi^4x^4\right)+o(x^4)\\ &= -\frac{1}{3}\pi^4x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

et

$$x^2\sin^2 x=\frac{1}{2}x^2(1-\cos 2\pi x)=\frac{1}{2}x^2(1-1+2\pi^2x^2)+o(x^4)=\pi^2x^4+o(x^4)$$

D'où

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2\pi x}=-\frac{\pi^2}{3}+o(1)$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=1-\dfrac{\pi^2}{3}$ et comme $F(1-x)=F(x)$, alors $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=1-\dfrac{\pi^2}{3}$. Donc F se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{F}$ sur le segment $[0,1]$ en posant $\tilde{F}(0)=\tilde{F}(1)=1-\dfrac{\pi^2}{3}$.

(c) Si $x\in]0,1[$, $\dfrac{x+1}{2}$ et $\dfrac{x}{2}$ restent dans $]0,1[$. Donc

$$\begin{aligned}F\left(\frac{x}{2}\right)+F\left(\frac{x+1}{2}\right)-4F(x) &= \frac{4}{(2-x)^2}+\frac{4}{x^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\frac{x}{2})}+\frac{4}{(1+x)^2}+\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\frac{x+1}{2})}\\ &\quad -\frac{4}{(1-x)^2}-\frac{4}{x^2}+\frac{4\pi^2}{\sin^2(\pi x)}\\ &= \frac{4}{(1+x)^2}+\frac{4}{(2-x)^2}-\pi^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}-\frac{4}{\sin^2\pi x}\right)\\ &= \frac{4}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

2. (a) Remarquons que pour $n\geq 2$ on a $\forall x\in[0,1],\ n-x\geq n-1$ et donc $\|f_n\|_\infty^{[0,1]}=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\dfrac{1}{(n-1)^2}$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geq 2}f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[0,1]$. D'autre part si $n\geq 1$ et $x\in[0,1]$, alors $x+n\geq n$ et donc $\|g_n\|_\infty^{[0,1]}=\sup\limits_{x\in[0,1]}|g_n(x)|=\dfrac{1}{n^2}$. D'où la convergence normale et donc uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 1}g_n$ sur $[0,1]$.

(b) La continuité des fonctions f_n et g_n et la convergence uniforme des séries précédentes montrent que la fonction $\tilde{H}$ est continue sur $[0,1]$.
De plus $\tilde{H}\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+x)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(2n-x)^2}$ et $\tilde{H}\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+1+x)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(2n-1-x)^2}$, d'où :

$$\begin{aligned}\tilde{H}\left(\frac{x}{2}\right)+\tilde{H}\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+x)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n-x)^2}-\frac{4}{(1+x)^2}-\frac{4}{(2-x)^2}\\ &= 4\tilde{H}(x)-\frac{4}{(1+x)^2}-\frac{4}{(2-x)^2}\end{aligned}$$

3. (a) Puisque $\tilde{F}$ et $\tilde{H}$ sont continues sur $[0,1]$, alors G est continue sur $[0,1]$. D'après ce qui précède on peut déduire que

$$\forall x\in[0,1],\ G\left(\frac{x}{2}\right)+G\left(\frac{x+1}{2}\right)-4G(x)=0$$

(b) Par continuité et compacité la fonction $x\mapsto|G(x)|$ est bornée sur $[0,1]$ et il existe $x_0\in[0,1]$ tel que $|G(x_0)|=\sup_{x\in[0,1]}|G(x)|$. Notons $M=|G(x_0)|$. D'après l'égalité précédente on a :

$$4M=4|G(x_0)|=\left|G\left(\frac{x_0}{2}\right)+G\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right|\leq\left|G\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|+\left|G\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right|\leq 2M$$

D'où $M=0$, ce qui montre que $\forall x\in[0,1]$, $G(x)=0$.

(c) D'après la définition de $\tilde{H}$, pour tout $x\in]0,1[$ on a :

$$\tilde{H}(x)+\frac{1}{(x-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-x)^2}+\frac{1}{(n+x)^2}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}$$

et comme $\tilde{H}(x)=-F(x)$, alors

$$-F(x)+\frac{1}{(x-1)^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}$$

ou encore en utilisent la définition de F

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}=\frac{1}{x^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}.$$

De l'égalité $\tilde{F}(0)+\tilde{H}(0)=0$, en déduit que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\tilde{H}(0)=-\tilde{F}(0)=\frac{\pi^2}{3}-1$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

• • • • • • • • • •