

Devoir libre n°12
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



Une base de \mathbb{R}^n étant fixée, on considère l'espace vectoriel \mathcal{L} des matrices carrées (n, n) à coefficients réels représentant les endomorphismes de \mathbb{R}^n .

On distingue dans \mathcal{L} les deux matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de termes respectifs $s_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i - 1$ et $t_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i - 1$ ou $i = 1$ et $j = n$.

Première partie

1.

$$SX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, S^2X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$$

et pour tout $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$

$$S^pX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p} \end{pmatrix}.$$

x_1 se trouve sur la $p + 1$ -ème ligne.

De même, pour tout $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on obtient $T^pX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-p-2} \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-p+1} \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p} \end{pmatrix}.$

x_1 se trouve sur la $p + 1$ -ème ligne.

Pour $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on obtient :

$$S^p = \left(\begin{array}{c|c} O_{p,n-p} & O_{p,p} \\ \hline I_{n-p} & O_{n-p,p} \end{array} \right), T^p = \left(\begin{array}{c|c} O_{p,n-p} & I_p \\ \hline I_{n-p} & O_{n-p,p} \end{array} \right)$$

où $O_{l,k}$ désigne la matrice nulle à l lignes et k colonnes. Pour $p \geq n$ on obtient $S^p = 0$ et $T^p = T^r$ où r est reste de la division euclidienne de p par n .

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et r le reste de division euclidienne de p par n , alors :

$${}^t T^p T^p = {}^t T^r T^r = \left(\begin{array}{c|c} O_{r,n-r} & I_r \\ \hline I_{n-r} & O_{n-r,r} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} O_{n-r,r} & I_{n-r} \\ \hline I_r & O_{r,n-r} \end{array} \right) = I_n.$$

Donc T^p est orthogonale.

On a $S^n = 0$, $T^n = I_n$ et $T^p = T^r = \left(\begin{array}{c|c} O_{r,n-r} & I_r \\ \hline I_{n-r} & O_{n-r,r} \end{array} \right) = S^r + {}^t(S^{n-r})$.

3. Comme $S^p = 0$ pour $p \geq n$ et $T^p = T^r$ où r le reste de la division euclidienne de p par n , alors $\mathcal{S} = \text{Vect}(I_n, S, S^2, \dots, S^{n-1})$ et $\mathcal{T} = \text{Vect}(I_n, T, T^2, \dots, T^{n-1})$.

Vérifions que les deux familles $(I_n, S, S^2, \dots, S^{n-1})$ et $(I_n, T, T^2, \dots, T^{n-1})$ sont libres. En effet, soit

$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p S^p = 0$, on obtient donc la matrice nulle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

D'où $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

De si $\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p T^p = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

et donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

On en déduit que $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{T} = n$.

Soit $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, donc il existe des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p S^p = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p T^p.$$

Donc, par comparaison des coefficients des deux matrices, on obtient $\alpha_0 = \beta_0$ et $\alpha_p = \beta_p = 0$ pour $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On en déduit que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \text{Vect}(I_n)$.

4. Si $1 \leq p \leq n-1$, la matrice S^p n'est pas inversible, car par exemple $\text{rg}(S^p) = n-p < n$ et aussi n'est pas diagonalisable puisque 0 est l'unique valeur propre de S^p et $\text{rg}(S^p) < n$.
Si $p \geq n$, S^p est nulle.

Deuxième partie

Si $A, B \in \mathcal{L}$, on définit $(A|B) = \frac{1}{n} \text{tr}(A^t B)$.

1. On a $(\cdot|\cdot) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$. La linéarité à gauche provient de la linéarité de la transposée et de la trace. Puisque pour tout $M \in \mathcal{L}$, $\text{tr}(M) = \text{tr}({}^t M)$, la symétrie s'obtient aussi facilement et implique la

bilinéarité. Enfin, pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{L}$, on a $(A|A) = \frac{1}{n} \text{tr}(A^t A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$ et il y a égalité si et seulement si pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = 0$, ce qui équivaut à $A = 0$. La forme $(\cdot|\cdot)$ est donc définie positive. Ainsi, elle définit bien un produit scalaire sur \mathcal{L} .

2. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $(A|B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$. Ainsi, d'après les expressions de S^p et de S^q , $(S^p|S^q) = 0$ si $p \neq q$ et $(S^p|S^p) = \|S^p\|^2 = \frac{1}{n}(n-p) = 1 - \frac{p}{n}$.

Donc la famille $\left(\left(\frac{n}{n-p} \right) S^p \right)_{0 \leq p \leq n-1}$ est une base orthonormée du sous-espace \mathcal{S} .

3. Il est clair que $(T^p|T^q) = 0$ si $p \neq q$ et $(T^p|T^p) = 1$, donc les matrices $0 \leq p \leq n-1$, constituent une base orthonormée du sous-espace \mathcal{T} .
4. D'après la question 2 de la première partie, $T^q = S^q + {}^t S^{n-q}$, donc $(S^p|T^q) = (S^p|S^q) + (S^p|{}^t S^{n-q}) = (S^p|S^q)$.

Soit $\sigma = \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_q S^q \in \mathcal{S}$, alors :

$$(T^p - S^p|\sigma) = \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_q (T^p - S^p|S^q) = \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_q [(T^p|S^q) - S^p|S^q] = \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_q [(S^p|S^q) - S^p|S^q] = 0$$

On en déduit que $T^p - S^p$ est orthogonale à \mathcal{S} .

Soit $\sigma^{**} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i S^i \in \mathcal{S}$ tel que $(T^p - \sigma^{**}|\sigma) = 0$, en particulier $(T^p - \sigma^{**}|S^j) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Mais

$$(T^p - \sigma^{**}|S^j) = (T^p - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i S^i|S^j) = (T^p|S^j) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (S^i|S^j) = (S^p|S^j) - \beta_j (S^j|S^j)$$

D'où $\beta_j = \frac{(S^p|S^j)}{\|S^j\|^2} = 0$ si $j \neq p$ et $\beta_p = 1$ et par suite $\sigma^{**} = S^p$. Ainsi S^p est l'unique élément de \mathcal{S} ayant la propriété de rendre $T^p - S^p$ orthogonale à tout $\sigma \in \mathcal{S}$.

5. Posons $\tau^* = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i T^i \in \mathcal{T}$. Cherchons $\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_j S^j$ tel que $(\tau^* - \sigma^*|S^p) = 0$ pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Donc nécessairement $\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i T^i|S^p \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta_j S^j|S^p \right) = 0$ ou encore $\alpha_p (S^p|S^p) - \beta_p (S^p|S^p) = 0$, d'où $\beta_p = \alpha_p$.

Inversement l'élément $\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j S^j$ convient.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, on a $(\sigma|\tau^*) = (\sigma|\tau^* - \sigma^*) + (\sigma|\sigma^*) = (\sigma|\sigma^*)$, d'où :

$$\frac{(\sigma|\tau^*)}{\|\sigma\| \cdot \|\tau^*\|} = \frac{(\sigma|\sigma^*)}{\|\sigma\| \cdot \|\tau^*\|} = \frac{\|\sigma^*\|}{\|\tau^*\|} \frac{(\sigma|\sigma^*)}{\|\sigma\| \cdot \|\sigma^*\|}.$$

Ainsi

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \frac{(\sigma|\tau^*)}{\|\sigma\| \cdot \|\tau^*\|} = \frac{\|\sigma^*\|}{\|\tau^*\|} \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \frac{(\sigma|\sigma^*)}{\|\sigma\| \cdot \|\sigma^*\|}.$$

