Devoir libre $n°03$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Exercice 1

1. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q de degré au plus égal à $n-1$ et tels que $P(s_i) = Q(s_i)$ pour tout $\in [\![1,n]\!]$. Le polynôme $P-Q$, qui est de degré au plus égal à $n-1$, admet donc n racines distinctes, donc nécessairement $P-Q=0$.
D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que

$$R(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{z-s_i} \tag{1}$$

On multiplie $R(z)$ par $(z-s_j)$, on obtient alors $(z-s_j)R(z) = \alpha_j + \sum_{i\neq j} \frac{\alpha_i}{z-s_i}$ puis on évalue en s_j. On trouve ainsi $\alpha_i = \frac{P(s_j)}{\prod\limits_{i\neq j}(s_j-s_i)} = \frac{u_j}{\prod\limits_{i\neq j}(s_j-s_i)}$.
Le polynôme $P = \sum_{j=1}^{n} u_j \prod_{i\neq j} \frac{z-s_i}{s_j-s_i}$ répond bien à la question. D'où l'existence et l'unicité.

2. Soit P et Q deux polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ tels que $P^{(j)}(s_i) = Q^{(j)}(s_i)$ pour $i \in [\![1,k]\!]$ et $j \in [\![0, n_i-1]\!]$, alors le polynôme $R = P-Q$ vérifie :

$$\forall 0 \leq j \leq n_i - 1,\ R^{(j)}(s_i) = 0\ \ \forall 0 \leq i \leq k. \tag{2}$$

Par conséquent, pour tout $i = 0, 1, \cdots, k$, s_i est une racine de R de multiplicité n_i. Si on compte les racines avec leurs multiplicités, on obtient n racines , or R est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc, nécessairement $R=0$. D'où l'unicité de $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ qui vérifie les (2).

3. Soit $P(x) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que

$$P(s_1) = u_1^0,\ \ P^{(1)}(s_1) = u_1^1 \ \text{ et }\ P(s_2) = u_2^0 \tag{3}$$

On obtient donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} as_1^2 + bs_1 + c = & u_1^0 \\ 2as_1 + b \quad = & u_1^1 \\ as_2^2 + bs_2 + c = & u_0^2 \end{array}\right.$$

Qui s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} s_1^2 & s_1 & 1 \\ 2s_1 & 1 & 0 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_1^1 \\ u_2^0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice associée au système est égal à $-(s_1-s_2)^2$ qui est non nul puisque $s_1 \neq s_2$. D'où l'existence et l'unicité de P vérifiant (3).

4. (a) La relation $\dfrac{P(z)}{(z-s_1)^{n_1}(z-s_2)^{n_2}...(z-s_k)^{n_k}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{n_j}\frac{A_j^r}{(z-s_j)^r}\right)$ s'écrit aussi sous la forme :

$$P(z) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{n_j} A_j^r \prod_{i=1}^{k}\frac{(z-s_i)^{n_i}}{(z-s_j)^r}\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{n_j} A_j^r \prod_{i\neq j}(z-s_i)^{n_i}(z-s_j)^{n_j-r}\right)$$

Il suffit donc de prendre $Q_{j,r}(z) = (z-s_j)^{n_j-r}\displaystyle\prod_{i\neq j}(z-s_i)^{n_i}$ avec $j \in [\![1,k]\!]$ et $r \in [\![1,n_j]\!]$, donc il y a exactement $n_1+n_2...+n_k = n$ polynômes.

(b) Soient $j \in [\![1,k]\!]$ et $l \in [\![0,n_j-1]\!]$ fixés. D'après ce qui précède, on a :

$$Q_{j,n_j-l}(z) = (z-s_j)^l \prod_{i\neq j}(z-s_i)^{n_i},$$

dont s_j est une racine d'ordre de multiplicité l, donc $Q_{j,n_j-l}^{(i)}(s_j) = 0$ pour $i \in [\![0,l-1]\!]$ et $Q_{j,n_j-l}^{(l)}(s_j) \neq 0$.

On a $P(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{n_j} A_j^r Q_{j,r}(z)\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=0}^{n_j-1} A_j^{n_j-r} Q_{j,n_j-r}(z)\right)$. D'où

$\forall i \in [\![1,k]\!],\quad P^{(l)}(s_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=0}^{n_j-1} A_j^{n_j-r} Q_{j,n_j-r}^{(l)}(s_i)\right)$, mais $Q_{j,n_j-r}^{(l)}(s_i) = 0$ puisque s_i est une racine d'ordre de multiplicité n_i si $j \neq i$, donc

$$P^{(l)}(s_i) = \sum_{r=0}^{n_i-1} A_i^{n_i-r} Q_{i,n_i-r}^{(l)}(s_i) = \sum_{r=0}^{l} A_i^{n_i-r} Q_{i,n_i-r}^{(l)}(s_i) \tag{4}$$

car $Q_{i,n_i-r}^{(l)}(s_i) = 0$ pour $r \in [\![l+1,n_i-1]\!]$.

L'égalité (4) conduit au système triangulaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} u_j^0 = A_j^{n_j} Q_{j,n_j}^{(0)}(s_j) & & & & & & \\ u_j^1 = A_j^{n_j} Q_{j,n_j}^{(1)}(s_j) & + & A_j^{n_j-1} Q_{j,n_j-1}^{(1)}(s_j) & & & & \\ \quad = \quad \vdots & & & & & & \\ u_j^{n_j-1} = A_j^{n_j} Q_{j,n_j}^{(n_j-1)}(s_j) & + & A_j^{n_j-1} Q_{j,n_j-1}^{(n_j-1)}(s_j) & + & \ldots & + & A_j^1 Q_{j,1}^{(n_j-1)}(s_j) \end{array}\right.$$

qui est un système inversible puisque les éléments diagonaux $Q_{j,n_j-1}^{(l)}(s_j)$, $l \in [\![0,n_j-1]\!]$ sont tous non nuls, donc on peut déterminer d'une manière unique $A_j^1, ..., A_j^{n_j-1}, A_j^{n_j}$ et ceci pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, ce qui montre l'existence du polynôme vérifiant (4).

Exercice 2

• Le fait que la combinaison de deux suites périodiques de période p est périodique de période p est immédiat.

• Considérons, pour tout $0 \leq i \leq p-1$, la suite $(\varepsilon_i)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\varepsilon_i(n) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } n = i \text{ modulo } p \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

Il est clair qu'il s'agit d'une famille de suites de nombres réels de $\mathscr{S}_p$.
Montrons que la famille engendre l'espace $\mathscr{S}_p$. Vérifions d'abord que la famille est libre, en effet, soit $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \varepsilon_i = 0$. Il faut montrer que $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{p-1} = 0$. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on a $0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \varepsilon_i(k) = \lambda_k \varepsilon_k(k) = \lambda_k$. Donc la famille $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ est libre.
Montrons qu'elle est génératrice. On va traiter ce problème par analyse-synthèse.
Analyse : On suppose que la famille $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ est génératrice, donc pour tout $u \in \mathscr{S}_p$, il existe $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}$ des réels tels $u = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \varepsilon_i$, alors nécessairement $\lambda_i = u(i)$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$.

Synthèse : Soit $u \in \mathscr{S}_p$, posons $v = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} u(i) \varepsilon_i$. Montrons que $u = v$. Soit $n \in \mathbb{N}$, par division euclidienne il existe q et r des entiers naturels tels que $n = qp + r$ avec $r \in [\![0, p-1]\!]$, donc $v(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} u(i)\varepsilon_i(n) = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\varepsilon_i(r) = u(r) = u(n)$, donc $u = v$.
Ceci prouve que la famille $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ est génératrice et comme elle est libre c'est une base de $\mathscr{S}_p$, en particulier $\mathscr{S}_p$ est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{R}} (\mathscr{S}_p) = p$.