Devoir libre $n°05$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●

1. Si $i \neq j$, alors $\zeta^{i-j} \neq 1$ car $1 \leq |i-j| \leq n-1$ et ζ est une racine n-ème de l'unité. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\zeta^{i-j}\right)^k = \frac{\left(\zeta^{i-j}\right)^n - 1}{\zeta^{i-j} - 1} = 0.$$

Si $i = j$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

En résumé, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk} = n\delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

2. Notons B la matrice dont le coefficient $b_{ij} = \dfrac{1}{n}\zeta^{ij}$. Le coefficient d'indice (i,j) du matrice produit BA est $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk}$. D'après le résultat de la question 1, on a donc $BA = \mathbf{I}_n$. Ainsi A est inversible d'inverse $A^{-1} = B$.

3. On remarque que la matrice A est une matrice de Vandermonde :

$$A = V\left(1, \zeta^{-1}, \zeta^{-2}, ..., \zeta^{-(n-1)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta^{-1} & \zeta^{-2} & \dots & \zeta^{-(n-1)} \\ 1 & \zeta^{-2} & \zeta^{-4} & \dots & \zeta^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{-(n-1)} & \zeta^{-2(n-1)} & \dots & \zeta^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

et que son déterminant est $\displaystyle\prod_{i>j}(\zeta^{-j} - \zeta^{-i})$, qui est non nul, ce qui montre qu'elle est inversible.

4. C'est une combinaison linéaire d'applications linéaires de E dans E.

5. Pour tout vecteur $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma(p_k(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^{i+1}(x) \ \text{ par linéarité de } \sigma & (1)\\ &= \frac{\zeta^k}{n}\sum_{j=1}^{n} \zeta^{-jk}\sigma^{j}(x) \ \text{ en posant } j = i+1 & (2)\\ &= \frac{\zeta^k}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{-jk}\sigma^{j}(x) \ \text{ car } \sigma^n = \mathbf{Id}_E \ \text{ et } \zeta^{-kn} = 1 & (3)\\ &= \zeta^k p_k(x) & (4) \end{aligned}$$

Ceci signifie bien que $p_k(x) \in E_k$.

6. Soit $x \in E$. Comme $p_l(x) \in E_l$ d'après la question précédente, on a $\sigma(p_l(x)) = \zeta^l p_l(x)$, et par récurrence $\sigma^i(p_l(x)) = \zeta^{il}p_l(x)$ pour tout $i \geq 1$. On en déduit que

$$(p_k \circ p_l)(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\zeta^{il}p_l(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\zeta^{il}\right)p_l(x).$$

D'après la question 1, ceci vaut 0 si $k \neq l$ et $p_l(x)$ si $k = l$. En conclusion $p_k \circ p_l = 0$ si $k \neq l$ et $(p_k)^2 = p_k$.

7. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_{n-1}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^i(x) && (5)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{-ik}\right)\sigma^i(x) && (6)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\delta_{i0}\sigma^i(x) \text{ d'après la question 1 avec } j=0 && (7)\\ &= \sigma_0(x) = x. && (8)\end{aligned}$$

Ceci montre que $p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1} = \mathbf{Id}_E$.
On sait que les E_k sont en somme directe, comme toute famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes. De plus, par ce qui précède, si $x \in E$ on a :

$$x = p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_{n-1}(x) \in E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_{n-1}.$$

Ceci montre que la somme directe des E_k est égale à E.
Enfin, le fait que p_k est le projecteur sur E_k associé à la décomposition de E en sous-espaces propres est exactement ce que dit l'écriture

$$x = p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_{n-1}(x).$$

8. (a) Si φ est une forme linéaire sur E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$) alors $\sigma^*(\varphi) = \varphi \circ \sigma$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur E. L'application $\sigma^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \sigma$ est donc définie sur E^* et elle est à valeurs dans E^*. Montrons qu'elle est linéaire. Soient φ, ψ deux formes linéaires de E, et λ, μ deux scalaires. On a :

$$\sigma^*(\lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi) \circ \sigma = \lambda\varphi \circ \sigma + \mu\psi \circ \sigma = \lambda\sigma^*(\varphi) + \mu\sigma^*(\psi).$$

Autrement dit $\sigma^* \in \mathscr{L}(E^*)$.

(b) La base duale $\mathscr{B}^* = (e_{k,i})_{k,i}$ de $\mathscr{B} = (e_{k,i})_{k,i}$ est l'unique base de E^* telle que $e^*_{k,i}(e_{l,j}) = 1$ si $(k,i) = (l,j)$, et $e^*_{k,i}(e_{l,j}) = 0$ sinon.
Nous devons ensuite vérifier qu'on a l'égalité $\sigma^*(e^*_{k,i}) = \zeta^k e^*_{k,i}$ entre formes linéaires sur E.

Soit $x \in E$ un vecteur, on peut l'écrire sur la base $\mathscr{B}$ sous la forme $x = \displaystyle\sum_{l,j}\lambda_{l,j}e_{l,j}$ avec $\lambda_{l,j} \in \mathbb{C}$.

On trouve :

$$\begin{aligned} \sigma^*(e^*_{k,i})(x) &= e^*_{k,i}(\sigma(x)) \text{ par définition de } \sigma^* && (9)\\ &= e^*_{k,i}\left(\sum_{l,j}\lambda_{l,j}\sigma(e_{l,j})\right) && (10)\\ &= e^*_{k,i}\left(\sum_{l,j}\lambda_{l,j}\zeta^l e_{l,j}\right) \text{ car } e_{l,j} \text{ est vecteur propre pour } \sigma \text{ associé à } \zeta^l && (11)\\ &= \lambda_{k,i}\zeta^k \text{ par définition de } e^*_{k,i} && (12)\\ &= \zeta^k e^*_{k,i}(x) \text{ par définition de } e^*_{k,i} \text{ encore.} && (13)\end{aligned}$$

Ceci démontre l'égalité annoncée.

9.

b)⇒a) Si les E_k sont des droites, comme leur somme directe est E, on a $\dim(E) = \sum_k \dim(E_k) = n$.

De plus, comme $E_k \neq \{0\}$, chaque puissance ζ^k est valeur propre, donc $X - \zeta^k$ divise le polynôme minimal π_σ de σ. Comme pour k variable ces polynômes sont premiers entre eux, alors leur produit, qui est $X^n - 1$, divise π_σ. Mais par ailleurs π_σ divise $X^n - 1$ puisque $\sigma^n = \mathbf{Id}_E$.

Finalement $\pi_\sigma = X^n - 1$.

a)⇒b) Montrons d'abord que $E_k \neq \{0\}$. En effet, si $E_k = \{0\}$ alors le projecteur p_k sur E_k est nul, ce qui fournit $\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^i = 0$. Dans ce cas, le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}X^i$ est un polynôme de degré $n-1$ qui annule σ. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse que le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$, donc $E_k \neq \{0\}$. Il en découle que $\dim(E_k) \geq 1$. Comme la somme de ces n sous-espaces, c'est-à-dire E, est de dimension n, alors ces sous-espaces sont en fait de dimension 1, c'est-à-dire des droites.

10. Pour tout $i \geq 1$, l'endomorphisme σ^i envoie $P(X)$ sur $P(\zeta^i X)$, ce qui pour $i = n$ montre que $\sigma^n = \mathbf{Id}_E$.

On peut maintenant remarquer que pour $0 \leq k \leq n-1$, le polynôme $e_k = X^k$ est un vecteur propre pour ζ^k puisque $\sigma(e_k) = (\zeta X)^k = \zeta^k X^k = \zeta^k e_k$. Comme ces polynômes sont en nombre n, ils forment une base de vecteurs propres. Ceci montre que l'espace propre E_k est réduit à la droite engendrée par e_k. D'après l'implication b)⇒a) de la question précédente, le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$.

••••••••••