Devoir libre $n°06$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Problème 1

Question préliminaire $(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta+\alpha\beta \geq 1+\alpha+\beta$ puisque $\alpha\beta \geq 0$.

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1v_1$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2v_2 + u_1v_1$ par application de la règle de Sarrus.

2. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n}u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Puis par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\Delta_n = u_nv_n\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2}.$$

3. Montrons dans un premier temps par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 0$.
La relation est vraie pour $n=1$ et $n=2$ puisque Δ_1 et Δ_2 sont des sommes de termes positifs.
Supposons la relation vraie au rang n et $n-1$ où $n \geq 2$.
Alors, puisque $a_{n+1} \geq 0$, $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1}\Delta_{n-1} \geq 0$, montrant ainsi la relation vérifiée au rang $n+1$.
Conclusion : $\forall n \geq 1, \Delta_n \geq 0$ et alors, $\forall n \geq 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n\Delta_{n-2} \geq 0$.
On a également $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2v_2 \geq 0$ et on en conclut que $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. On a l'égalité pour $n=1$ et $\Delta_2 = 1 + u_2v_2 + u_1v_1 \leq (1+a_1)(1+a_2)$ par la question préliminaire.
Supposons la relation vérifiée aux rangs n et $n-1$.
Alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &\leq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) + a_{n+1}\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k) && (1)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)(1+a_n+a_{n+1}) && (2)\\
&\leq \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)(1+a_n)(1+a_{n+1}) && (3)\\
&= \prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k). && (4)
\end{aligned}$$

On a utilisé la question préliminaire. Ceci termine le raisonnement par récurrence.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est clairement strictement positif. On peut donc considérer la suite $(\ln P_n)_n$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln P_n = S_n$.
La suite $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1 + a_n)$.
Or cette série est une série convergente car :
- elle est à termes positifs.
- $\ln(1 + a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge
- On conclut par critère d'équivalence.

Ainsi, $(S_n)_n$ converge donc $(\ln P_n)_n$ converge. Par continuité de exp et caractérisation séquentielle de la continuité, $(P_n)_n$ converge. On peut même préciser vers une limite strictement positive.

(b) Étant convergente, la suite $(P_n)_n$ est majorée. L'inégalité du 4 nous montre ainsi que $(\Delta_n)_n$ est majorée. Étant croissante et majorée, elle converge alors.

6. (a) À vérifier par récurrence sur n.

(b) Considérons la suite des sommes partielles $(T_n)_n$ de la série $\sum\limits_{n\geq 2} t_n$:
$\forall n \geq 2, T_n = \sum\limits_{k=2}^{n} t_k = \Delta_n - \Delta_1$, par télescopie .
Par hypothèse, $(\Delta_n)_n$ converge donc il en est de même pour $(T_n)_n$, ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n\geq 2} t_n$ converge.

(c) $\forall n \geq 3, t_n = a_n \Delta_{n-2} \geq a_n \geq 0$ par 6.1.
Par critère de comparaison des séries à termes positifs, et puisque la série $\sum\limits_{n\geq 2} t_n$ converge, on obtient la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge

7. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite $(\Delta_n)_n \in \mathbb{N}^*$ et la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

Problème 2

1. (a) Soit z un élément de $\mathbb{C}$. On a $\exp(iz) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$ et $\exp(-iz) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}$. Par linéarité

$$\exp(iz) - \exp(-iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{n!}.$$

Si n est pair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k$, alors $(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k - (-1)^k\big) z^{2k} = 0$.

Si n est impair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k+1$, alors $(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k + (-1)^k\big)iz^{2k+1} = 2i(-1)^k z^{2k+1}$. Donc dans la somme de série précédente tous les termes pairs sont nuls, et par conséquent :

$$\exp(iz) - \exp(-iz) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2i\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

(b) Comme précédemment par linéarité, $\exp(iz) + \exp(-iz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n + (-iz)^n}{n!}$. Or si n est pair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k$, alors $(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k + (-1)^k\big)z^{2k} = 2(-1)^k z^{2k+1}$. Si n est impair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k+1$, alors $(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k - (-1)^k\big)iz^{2k+1} = 0$. Donc dans la somme de série précédente tous les termes impairs sont nuls, donc $\exp(iz) + \exp(-iz) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$.

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

2. Pour tout entier n, $A^n = \gamma^n I_2$. Donc pour tout entier m, $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1} I_2$.

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1}$ admet une limite quand m tend vers ∞ et elle vaut $s(\gamma)$. Donc

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1}\right) I_2 = s(\gamma) I_2.$$

Ainsi

$$\varphi(A) = s(\gamma) I_2.$$

3. On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.

(a) Comme A est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que A admet deux valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable. Donc il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

(b) ⋄ Comme D est diagonale, pour tout entier n, $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$, et pour tout entier m,

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} D^{2n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Or $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\beta^{2n+1}$ admettent une limite quand m tend vers ∞ et elles valent respectivement $s(\alpha)$ et $s(\beta)$. Donc $\varphi(D)$ existe et

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}=\begin{pmatrix}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} & 0\\ 0 & \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\beta^{2n+1}\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\varphi(B)=\begin{pmatrix}s(\alpha) & 0\\ 0 & s(\beta)\end{pmatrix}.$$

◇ L'application $M\longmapsto PMP^{-1}$ est une application linéaire sur l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc l'application $M\longmapsto PMP^{-1}$ est continue. Ainsi

$$\lim_{m\to\infty}P\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}\right)P^{-1}=P\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}\right)P^{-1}.$$

Or

$$P\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}\right)P^{-1}=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}PB^nP^{-1}=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}.$$

Donc $\lim_{m\to+\infty}P\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}\right)P^{-1}=\varphi(A)$ et $\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}=\varphi(B)$.

Ainsi

$$\varphi(A)=P\begin{pmatrix}s(\alpha) & 0\\ 0 & s(\beta)\end{pmatrix}P^{-1}.$$

4. **On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta=\alpha$.**

(a) Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A. α est une valeur propre de A. Donc il existe un vecteur e_1 non nul tel que $u(e_1)=\alpha e_1$.
Notons e_2 un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que (e_1,e_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$. (Un tel vecteur existe d'après le théorème de la base incomplète). Alors il existe deux complexes x et y tels que $u(e_2)=ye_1+xe_2$. Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$ dont les coefficients diagonaux sont exactement les valeurs propres de A, c'est-à-dire α, donc $x=\alpha$. Ainsi il existe un complexe y et une matrice Q inversible tels que

$$T=\begin{pmatrix}\alpha & y\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=Q^{-1}AQ.$$

(b) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $T^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}y\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$

◇ Si $n=0$, $T^0=I_2$ et $\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}y\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}=I_2$

- Soit n un entier fixé. Supposons que $T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$, alors

$$T^{n+1} = T.T^n = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & n\alpha^n y + \alpha^n y \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{pmatrix}.$$

- Finalement par le principe de récurrence, pour tout entier n,

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

(c) Par la continuité de $M \longmapsto QMQ^{-1}$, $\varphi(A) = Q\Big(\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} T^{2n+1}\Big)Q^{-1}$. Or

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} T^{2n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\alpha^{2n}y \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\sum\limits_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\alpha^{2n}y = \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\alpha^{2n}y$. Donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\alpha^{2n}y = c(\alpha)y$.
Ainsi

$$\varphi(A) = Q \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

5. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. A admet alors au moins une valeur propre complexe et au plus deux. Ainsi soit $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha\}$ soit $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha, \beta\}$.
Le premier cas vient d'être traité à la question 4 et le deuxième à la question 3. Ainsi $\varphi(A)$ existe pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

6. Supposons qu'il existe une matrice X telle que $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Parmi les expressions obtenues de $\varphi(A)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable uniquement à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$, donc X admet une seule valeur propre α et $s(\alpha) = 1$. Et il existe un complexe y tel que $yc(\alpha) = 2024$. mais

$$\begin{aligned}
\big(s(\alpha)\big)^2 + \big(c(\alpha)\big)^2 &= \left(\frac{1}{2i}\left[\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left[\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)\right)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\big(\exp(2i\alpha) + \exp(-2i\alpha) - 2\big) + \frac{1}{4}\big(\exp(2i\alpha) + \exp(-2i\alpha) + 2\big) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $c(\alpha) = 0$. Alors l'égalité $yc(\alpha) = 2024$ n'est pas vérifiée. Ainsi il n'existe pas de matrice X de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

●●●●●●●●●●●