Devoir libre $n°08$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••

Partie 1 : Calcul de $\zeta(2)$

(1) Pour x réel et n entier naturel non nul donnés, on a

$$\cos((2n+1)x)+i\sin((2n+1)x)=(\cos x+i\sin x)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}i^k\mathbb{C}_{2n+1}^k\cos^{2n+1-k}x\sin^k x.$$

puis par identification des parties imaginaires

$$\sin(2n+1)x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathbb{C}_{2n+1}^k\cos^{2(n-k)}x\sin^{2k+1}x$$

et enfin en divisant les deux membres par $\sin^{2n+1}x$ pour $x\notin S=\{\,k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\,\}$, on obtient

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1}x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathbb{C}_{2n+1}^k\cot^{2(n-k)}x\,.$$

(2) Tout d'abord, pour $1\leq k\leq n$, on a $0<\dfrac{k\pi}{2n+1}\leq\dfrac{n\pi}{2n+1}<\dfrac{n\pi}{2n}=\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi les nombres $\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $1\leq k\leq n$, sont deux à deux distincts et dans $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Par injectivité de la fonction $x\mapsto\cot x$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, les n nombres $\cot\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$, $1\leq k\leq n$, sont deux à deux distincts et de plus strictement positifs. Finalement, les n réels x_k sont deux à deux distincts.

Maintenant, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $P(x_k)=\dfrac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=0$. On a donc trouvé n réels deux à deux distincts racines du polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathbb{C}_{2n+1}^k x^{n-k}$ qui est de degré n.

(3) Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme permettent d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=-\frac{\mathbb{C}_{2n+1}^k}{\mathbb{C}_{2n+1}^k}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

Ensuite, pour $x\notin S$, $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)=n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

4 Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont respectivement strictement concaves et strictement convexes sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les graphes de ces fonctions sont respectivement strictement au-dessous et strictement au-dessus de leur tangente en $(0,0)$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \ \sin x < x < \tan x.$$

(a) Puisque, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < x < \tan x$, on a aussi après passage à l'inverse et élévation au carré

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \ \cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc,

$$\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{n(2n-1)}{3} = \sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3},$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\pi^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}\pi^2.$$

(b) Lorsque on fait tendre n vers plus l'infini, les deux suites à gauche et à droite de l'encadrement précédent convergent vers la même valeur, on peut donc conclure que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2}$ existe et que

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5 Remarquons d'abord que les deux séries $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^p}{p^2}$ et $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{(1}{(2p+1)^2}$ sont absolument convergentes. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de sommes partielles associée à la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}S_n + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où par passage à la limite :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De même, on a :

$$\sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{-1}{4}S_n + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où par passage à la limité :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)p-1}{p^2} = -\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie 2 : Application

1. La fonction g est définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Ainsi, on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.
   De plus, on sait que :
   $$\forall x \in]-1,1[,\ \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$
   donc h est développable en série entière et
   $$\forall x \in]-1,1[,\ \ h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}.$$
   Enfin, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, donc h aussi. De plus, h étant développable en série entière au voisinage de 0, h est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0. Donc la fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1.+\infty[$.
2. La fonction h étant continue sur $[0,1]$, elle est intégrable sur ce segment. Pour tout $r \in]0,1[$, on a :
   $$\int_0^r \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^r \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^r x^{n-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} r^n.$$
   La fonction $r \mapsto \displaystyle\int_0^r \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$ de est continue sur $[0,1]$ et la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} r^n$ a pour rayon de convergence 1 et, de plus, elle converge en $r = 1$, d'après le théorème d'Abel, elle est aussi continue en 1 et donc :
   $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie 3 : Calcul des intégrales

1. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\ln x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{\ln x}{1-x}$ sont continues et se prolongent par continuité en 1. De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x}$ est continue sur $]0,1]$.
   Au voisinage de 0, on a :
   $$\frac{\ln x}{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x,\ \frac{\ln x}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x \text{ et } \frac{\ln x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x.$$
   et la fonction $\ln$ est intégrable sur $[0,1]$.
   Ceci montre que les intégrales J, K et L sont convergentes.

(2) On peut donc écrire

$$K+L=\int_0^1\left(\frac{\ln x}{1-x}+\frac{\ln x}{1+x}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

soit

$$K+L=2J.$$

(3) Avec le changement de variable $x=t^2$, donc $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$, on obtient :

$$K=\int_o^1\frac{\ln(t^2)}{1-t^2}2t\mathrm{d}t=4\int_0^1\frac{t\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t,$$

d'où

$$K+4L=4\int_0^1\left(\frac{x\ln x}{1-x^2}+\frac{\ln x}{1+x}\right)\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

et donc $k+4L=4J$.

(4) Soit $a\in]0,1[$. On effectue une intégration par parties :

$$\int_a^1\frac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x=[\ln x\ln(1+x)]_a^1-\int_a^1\frac{1}{x}\ln(1+x)\mathrm{d}x=-\ln a\ln(1+a)-\int_a^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Donc, en faisant tendre a vers 0 on obtient :

$$L=-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{-\pi^2}{12}.$$

Mais, on a $K+L=2J$ et $K+4L=4J$, donc $J=\frac{3}{2}L=-\frac{\pi^2}{8}$ et $K=\frac{4}{3}J=-\frac{\pi^2}{6}$.

(5) • La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ est continue sur $]1,+\infty[$ et on sait qu'elle est prolongeable par continuité en 1. Elle est donc intégrable sur tout segment de $[1,+\infty[$. De plus $\dfrac{\ln x}{1-x^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ converge.

En posant le changement de variable $x=\dfrac{1}{t}$, on obtient :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(\frac{-\mathrm{d}t}{t^2}\right)=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t=J=\frac{-\pi^2}{8}.$$

• La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est continue sur $]0,1[$, elle est donc intégrable sur tout segment de $]0,1[$. De plus, cette fonction est prolongeable par continuité en 0 et vérifie

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\underset{x\to1}{\sim}-\ln(1-x),$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x$ converge. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$ est convergente.

On a

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$$

En posant le changement de variable $x = 1-t$ dans la seconde intégrale, il vient :

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12} + \int_1^0 \frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12} - K = \frac{\pi^2}{4}.$$

• La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$, elle est donc intégrable sur tout segment de $]1,+\infty[$. De plus, cette fonction est prolongeable par continuité en 1 et vérifie

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$ est convergente.

En posant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^0 \ln\left(\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}-1}\right) t\left(\frac{-\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int_0^1 \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} = M = \frac{\pi^2}{4}.$$

●●●●●●●●●