DEVOIR LIBRE $n°1$

Correction

•••••••

Exercice

1. f est une fonction 1-lipschitzienne, donc elle est uniformement continue sur I.
2. On a $f(a)-a \geq 0$ et $f(b)-b \leq 0$ et comme f est continue, alors d'après le théorème de valeurs intérmaidires, il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.
   Supposons qu'il existe deux points fixes α et β, alors l'inégalité
   $$|f(\alpha)-f(\beta)|<|\alpha-\beta|$$
   conduit à une contradiction.
3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $I=[a,b]$ puisque $f(I)\subset I$, et comme I est un compact, donc on peut extraire une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.
4. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$|x_{n+1}-\alpha|=|f(x_n)-f(\alpha)|<|x_n-\alpha|,$$
   donc la suite $(|x_n-\alpha|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée (par 0), donc elle converge. La suite $(|x_{\varphi(n)}-\alpha|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|h-\alpha|$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=|h-\alpha|$.
5. Par continuité, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_{n-1})-\alpha|=|f(h)-\alpha|$, et donc $|f(h)-\alpha|=|h-\alpha|$ et comme $|f(h)-\alpha|=|f(h)-f(\alpha)|<|h-\alpha|$ alors nécessairement $h=\alpha$.

Problème

1. La somme est bien définie car, pour tout polynôme $f=\sum\limits_{i=0}^{\deg P} a_iX^i$, si $n>\deg f$ alors $f^{(n)}(0)=0$ et donc $\|f\|=\displaystyle\sum_{n=0}^{\deg f}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\sum_{i=0}^{\deg P}|a_i|$.
   On vérifie facilement les trois propriétés de la norme.
2. (a) Soit d l'application considérée, la linéarité est évidente, puisque $\forall f\in E$, $|d(f)|=|f^{(n)}(0)|\leq n!\|f\|$. On a donc la continuité de d et l'inégalité $\|d\|\leq n!$.
   Pour $f(x)=x^n$, on a $\|f\|=1$ et $d(f)=n!$ ce qui permet d'affirmer que $\|d\|=1$.

   (b) Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ f_n(x)=\frac{x^n}{n}.$$
   On a $\|f_n\|=\dfrac{1}{n}$ et $\|f_n'\|=1$. Si on pose $\varphi(f)=f'$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 alors que $(\varphi(f_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, puisque $\|\varphi(f_n)\|=1$ ce qui prouve que l'application linéaire φ n'est pas continue.
3. On a $\|f_{n+1}-f_n\|=\left\|\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+1}\right\|=\dfrac{1}{2^{n+1}}$ d'où
   $$\|f_{n+p}-f_n\|\leq\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}\leq\frac{1}{2^n}.$$
   La suite $(f_n)_n$ est donc de Cauchy.
   Supposons qu'elle admette une limite f dans E. Soit $f(x)=a_0+\ldots+a_px^p$, on a
   $$f_{p+k}(x)-f(x)=(1-a_0)+\ldots+\left(\frac{1}{2^p}-a_p\right)x^p+\left(\frac{x}{2}\right)^{p+1}+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^{p+k},$$
   d'où $\|f_{p+k}-f_p\|\geq\dfrac{1}{2^{p+1}}+\ldots+\dfrac{1}{2^{p+k}}\geq\dfrac{1}{2^{p+1}}$, ce qui contredit la convergence de la suite $(f_n)_n$ vers f.

4. On sait qu'une intersection de fermés est un fermé, or
$$F = \{g \in E / f \prec g\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$
où $F_n = \{g \in E / f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0)\}$. F_n est un fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue donc F est un fermé.
On fait de même pour $F' = \{g \in E / g \prec f\}$.
5. $[f, g]$ est un fermé car il est intersection de deux fermés grace à la question 5. Soit $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $[f, g]$, on écrit $h_p(x) = a_0^p + ... + a_{n_p}^p x^{n_p}$ on sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_n^p \leq b_n$ où a_n et b_n sont les coefficients de f et g.
Si on pose $q = \max(\deg f, \deg g)$ alors on peut choisir $n_p = q$ pour tout p (quitte à écrire des coefficients nuls pour le polynôme h_p). On utilise alors le fait que $[a_0, b_0] \times ... \times [a_q, b_q]$ est compact et que $(a_0^p, ..., a_q^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de ce compact. On pourra alors extraire une suite $(a_0^{\varphi(p)}, ..., a_q^{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, la suite $(h_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ sera convergente dans E, ce qui montre que $[f, g]$ est un compact.
6. On sait déjà que $[0, f_p]$ est un compact pour tout $p \in \mathbb{N}$. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} [0, f_p]$.
On pose $A = \{p \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N} / h_n \in [0, f_p]\}$ et on distingue deux cas :
   - A est fini : Si $P = \max(A)$ alors $\{h_n\} \subset \bigcup_{p=0}^{P} [0, f_p]$. En effet, si $q > P$, alors $\nexists n \in \mathbb{N}$ tel que $h_n \in [0, f_q]$.
   Or $\bigcup_{p=0}^{P} [0, f_p]$ est un compact, on peut donc extraire une suite convergente de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - A est infini : On peut extraire de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(h_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $h_{\varphi(n)} \in [0, f_{\psi(n)}]$ où ψ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante. On aura alors $h_{\varphi(n)}$ tend vers 0.

•••••••••••