DEVOIR LIBRE n°2

Correction

•••••

Exercice 1

1. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$. Le calcul donne, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{\frac{y^3}{x^3}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi'(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y}{x}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi'(xy) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-1}{4} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y^5}{x^7}} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \psi''(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-1}{4} \sqrt{\frac{x}{y^3}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{xy}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y}{x^3}} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \psi''(xy) \end{cases}$$

D'où l'équation aux dérivées partielles : $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

2. On a $f(x, y) = g(u, v) = g(xy, \frac{y}{x})$, donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{y^2}{x} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) - \frac{2y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v). \end{cases}$$

D'où $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \frac{y}{x} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) - 4y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$.

3. La question précédente montre que si f est solution de (1), la fonction est solution de (2). Ainsi la fonction $h : u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ de l'équation différentielle linéaire $z - 2uz' = 0$ et ceci pour tout $v > 0$.

Donc $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = a(v)\sqrt{u}$ où a est une fonction d'une seule variable, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc $g(u, v) = A(v)\sqrt{u} + B(u)$ où A et B sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, et par conséquent la solution générale de (1) est de la forme :

$$f(x, y) = A\left(\frac{y}{x}\right) \sqrt{xy} + B(xy).$$

Exercice 2

1. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \cos y \\ \frac{1}{2} \cos x & 1 \end{pmatrix}$.

2. Si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, alors $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(\sin y_1 - \sin y_2, \sin x_2 - \sin x_1)$ et donc

$$\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| = \frac{1}{2} \|(\sin y_1 - \sin y_2, \sin x_2 - \sin x_1)\|,$$

mais

$$\begin{aligned} \|(\sin y_1 - \sin y_2, \sin x_2 - \sin x_1)\|^2 &= (\sin y_2 - \sin y_1)^2 + (\sin x_2 - \sin x_1)^2 \\ &\leq (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \\ &= \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^2. \end{aligned}$$

(car $x \mapsto \sin x$ est 1-lipshitzienne). D'où l'inégalité demandée.

3. D'après la question précédente f est injective et $\det J_f(x, y) = 1 + \frac{1}{4} \cos x \cos y \neq 0$, donc d'après le théorème de cours, f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

4. (a) On a $J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cos y \\ -\frac{1}{2} \cos x & 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$d\varphi_{(x_0, y_0)}(h, k) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cos(y_0) \\ -\frac{1}{2} \cos(x_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(y_0)k \\ -\frac{1}{2} \cos(x_0)h \end{pmatrix}$$

Ainsi $\|d\varphi_{(x_0, y_0)}(h, k)\|^2 = \frac{1}{4}(k^2 \cos^2 y_0 + h^2 \cos^2 x_0) \leq \frac{1}{4}(k^2 + h^2) = \frac{1}{4}\|(h, k)\|^2$ et par conséquent $\|d\varphi_{(x_0, y_0)}\| \leq \frac{1}{2}$.

Donc le théorème des accroissements finis s'applique à $\varphi : \forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.$$

(b) φ étant une application continue de $\mathbb{R}^2$ qui est complet, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\frac{1}{2}$ -contractante, donc le théorème du point fixe, montre qu'il existe un unique point (x, y) tel que $\varphi(x, y) = (x, y)$, ce point fixe vérifie $f(x, y) = (a, b)$, ainsi f est une application surjective et donc $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

5. On a $f(0, 0) = (0, 0)$, donc $J_{f^{-1}}(0, 0) = (J_f(0, 0))^{-1} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

•••••