DEVOIR LIBRE $n°4$

Correction

•••••••

Partie. I

1. La linéairité de f résulte de celle de u, et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(A)$, d'où $\operatorname{rg} f = 1$.
2. Supposons $sp(f) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in spf$, alors il existe $x \in E\backslash\{0\} : f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow u(x)(\lambda - u(A)) = 0$.
   • Si $u(x) = 0$, alors $f(x) = 0$, donc 0 est valeur propre de f et $E_0 = \ker u$
   • Si $u(x) \neq 0$, alors $\lambda = u(A)$ et on a : $f(A) = u(A)A$, le vecteur propre associé à $u(A)$ est donc A, d'où $E_{u(A)} = \operatorname{Vect}(A)$.
3. On a $\operatorname{rg} f = 1 \Longrightarrow \dim \ker f = n-1$, donc 0 est valeur propre d'ordre $(n-1)$, d'où f est diagonalisable si et seulement si $u(A) \neq 0$.
4. (a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
   Soit $B \in E$ tel que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(B)$, d'où : $\forall x \in E, \exists l_x \in \mathbb{R} : g(x) = l_x B$.
   On vérifie que $v : x \longrightarrow l_x$ est une forme linéaire sur E, non nulle car l'endomorphisme g est non nul.
   Donc On a : $\forall x \in E$, $g(x) = v(x)B$

   (b) On a $\operatorname{rg} = 1 \Longrightarrow \dim \ker g = n-1$, et on a aussi $g(B) = v(B)B$ et par conséquent g est diagonalisable si et seulement si $v(B) \neq 0$ ce qui est équivalent à $g^2 \neq 0$ à cause de l'égalité $g^2(B) = (v(B))^2 B$

   (c) Soit $(e_1, e_2, ...e_{n-1})$ une base de $\ker g$, alors $(e_1, e_2, ...e_{n-1}, B)$ est une base de E et dans cette base la matrice de g s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \text{avec } \alpha = v(B).$$

   (d) On a $g(B) = 0$, donc on compléte B en une base $(B, e_2, ...e_{n-1})$ de $kerg$, considérons ensuite un vecteur $e_n \in E : g(e_n) = v(e_n)B, v(e_n) \neq 0$.
   Donc $(B, e_2, ...e_{n-1}, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de g s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Soient M et N deux matrices de rang 1.
$\Longrightarrow) \exists P \in \mathcal{GL}_n(R) : M = P^{-1}NP$, d'où : $\operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(P^{-1}NP) = \operatorname{Tr}(NPP^{-1}) = \operatorname{Tr}(N)$

$\Longleftarrow)$ Si $M^2 \neq 0$, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(R) : M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{Tr} M \end{pmatrix} P$ et la condition $\operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr} N$ entraîne que : $N^2 \neq 0$. Donc il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(R)$:
$$N = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{Tr} M \end{pmatrix} Q$$

d'où $Q^{-1}PM(Q^{-1}P)^{-1} = N$.

5. On a $\operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr} N = 0$, donc M et N sont semblables. Ici $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Donc $N = QP^{-1}M(QP^{-1})^{-1} = RMR^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie. II

1. • Notons $g = h/_{\ker u}$, $g(x) = u(A)x$, donc g est homothétie de rapport $u(A)$.
   • Soit $x \in \ker h$, alors $u(A)x = u(x)A \Longrightarrow x \in \operatorname{Vect}(A)$ et on a $\forall\lambda \in R$, $h(\lambda A) = 0$, d'où $\ker h = \operatorname{Vect}(A)$.
2. $\forall x \in E$, $u \circ h(x) = u(A)u(x) - u(x)u(A) = 0$. Donc $\operatorname{Im} h \subset \ker u$ et $\dim \operatorname{Im} h = n-1 \Longrightarrow \operatorname{Im} h = \ker u$
3. Supposons que $sp(h) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in sp(h)$. Alors il existe $x \neq 0 : u(A)x - u(x)A = \lambda x$, c'est-à-dire $(u(A) - \lambda)x = u(x)A$
   • Si $\lambda \neq u(A)$, alors $x \in \operatorname{Vect}(A)$ et on a aussi $h(A) = 0$. Donc $\lambda = 0$ et $E_0 = \operatorname{Vect}(A)$.
   • Si $\lambda = u(A)$, alors $u(x) = 0$, d'où $E_{u(A)} = \ker u$.
   • Si $\dim E < \infty$, h est diagonalisable car : $\dim E_0 = 1$ et $\dim E_{u(A)} = n - 1$.
4. (a) Soit $x \in E\backslash\{0\}$ une solution de l'équation (1), alors $x \in \operatorname{Vect}(A)$, d'autre part soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

   $$\alpha(\lambda A) - u(\lambda A)A = 0$$

   Donc si $\alpha \neq u(A)$ l'équation en question n'admet que la solution nulle et si $\alpha = u(A)$ l'espace de solutions est la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(A)$.

   (b) Si x_0 est solution de (2), alors $x \in E$ est solution de (2) si et seulement si $x - x_0$ est solution de (1). Donc l'équation (2) admet des solutions non triviales si et seulement si $\alpha = u(A)$.
   D'autre part si x est solution de (2), alors $u(A)x - u(x)A = B$ c.à.d $x \in F = \frac{1}{u(A)}B + \operatorname{Vect}(A)$
   Réciproquement : Soit $y \in F, y = \frac{1}{u(A)}B + \mu A$

   $$u(A)y - u(y)A = B \Longleftrightarrow B + \mu u(A)A - \frac{u(B)}{u(A)}B - \mu u(A)A = B \Longrightarrow u(B) = 0$$

   Conclusion :
   • Si $\alpha \neq u(A)$, l'équation (2) admet une seule solution.
   • Si $\alpha = u(A)$, et $u(B) = 0$, l'espace des solutions de (2) est l'espace affine $\frac{1}{u(A)}B + \operatorname{Vect}(A)$.

   (c) Comme $\operatorname{Tr}({}^tA - A) = 0$ et $\alpha = \operatorname{Tr}(A)$, l'espace de solutions de l'équation $\operatorname{Tr}(A)x - \operatorname{Tr}(x)A = ^t A - A$ est : $\frac{1}{{}^tA}({}^tA - A) + \operatorname{Vect}(A)$.

   (d) Soit a la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $a(t) = \sin(t)$.
   On cherche d'abord une solution particulière f_0, si f_0 existe alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_0 = \sin(\frac{x}{2}) + \lambda \sin(x)$ en remplaçant dans l'équation (4) on trouve $\lambda = -2$, d'où $f_0 = \sin(\frac{x}{2}) + \lambda \sin(x)$, et comme $u(a) = 2 \neq 1$ (1 la valeur de α) l'équation (4) admet une solution unique, c'est $f_0 = \sin(\frac{x}{2}) + \lambda \sin(x)$

• • • • • • • • • • •