DEVOIR SURVEILLÉ $n°5$

Correction
Med TARQI

•••••••

PRÉLIMINAIRE

1. Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|M\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\|x\|_\infty$$

Donc $\|M\|_\infty \leq \max\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Soit i_0 l'indice vérifiant $\max\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0j}|$. Le vecteur x de composantes $x_j = \dfrac{a_{i_0j}}{|a_{i_0j}|}$ si $a_{i_0j} \neq 0$ et $x_j = 1$ si $a_{i_0j} = 0$ vérifie

$$(Mx)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}\frac{a_{i_0j}}{|a_{i_0j}|} = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0j}|.$$

D'où $\|M\|_\infty = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

2. Soit λ une valeur propre réelle de M, alors il existe $x \neq 0$ tel que $Mx = \lambda x$ et donc

$$\|\lambda x\| = \|Mx\| \leq \|M\|\|x\|$$

et donc $|\lambda| \leq \|M\|$.

3. M étant symétrique réelle, donc diagonalisable dans une $\mathbb{R}$. Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres (réelles) de M et $\mathscr{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une base orthonormale de ses vecteurs propres. Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iv_i$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ décomposé dans la base $\mathscr{B}$, on alors $Mx = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_ix_iv_i$ et donc $(Mx|Mx) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2x_i^2$ et par conséquent

$$\min_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x|x) \leq (Mx|Mx) \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x|x)$$

d'où :

$$\max_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \|M\|_2 \leq \max_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

Montrons que $\|M\|_2 = \max\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |\lambda_{i_0}|$, en effet, d'après ce qui précède $|\lambda_0| \leq \|M\|_2$ et donc $\|M\|_2 = \max\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |\lambda_{i_0}|$.

PARTIE I : DIAGONALISATION DE A_0

1. M étant réelle symétrique, donc ces valeurs propres sont réelles. Soit λ une valeur propre de M, alors $|\lambda| \leq \|M\|_\infty$, mais $\|M\|_\infty = 2$, donc $\lambda \in [-2, 2]$.
2. (a) Soit θ dans $]0, \pi[$, on note $\lambda = 2\cos\theta$, on a :

$$\lambda I_n - B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Un développement par rapport à la première ligne (ou première colonne) donne

$$\det(\lambda I_n - B) = \lambda \det(\lambda I_{n-1} - B) - \det(\lambda I_{n-2} - B),$$

ou encore

$$(*) \quad u_n(\theta) = 2\cos\theta u_{n-1}(\theta) - u_{n-2}(\theta).$$

(b) L'équation caractéristique de $(*)$ est $r^2 - 2\cos\theta r + 1 = (r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta}) = 0$, donc il existe des constantes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n(\theta) = Ae^{ni\theta} + Be^{-ni\theta}.$$

Les conditions intiales $u_0(\theta) = 1$ et $u_1(\theta) = 2\cos\theta$, montrent que $u_n(\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. D'autre part, $u_n(\theta) = 0$ si, et seulement si, $\sin(n+1)\theta = 0$ ou encore si, et seulement si, $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi les $\lambda_k = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, $k \in [\![1, n]\!]$ sont n racines distinctes du polynôme caractéristique de B_n ; donc elles sont les valeurs propres de B_n.

3. (a) Les valeurs propres de A_0 sont $\mu_k = 2 + 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) = 4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = 1, 2, ..., n$. Puisque les valeurs propres sont simples sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles.

   (b) On sait que les valeurs propres de A_0 sont les $\dfrac{1}{\mu_k}$, $k = 1, 2, .., n$, d'après la partie préliminaire, on a :

$$\|A_0^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min\limits_{i=1}^{n} |\mu_i|} = \frac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)} = \frac{1}{\dfrac{\pi^2}{(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)} \simeq \frac{(n+1)^2}{\pi^2}.$$

PARTIE II

1. Supposons que M est monotone. Soit $v \in E_2$, c'est-à-dire $Mv \geq 0$ et donc $MM^{-1}v \geq 0$, d'où $v \geq 0$ et par suite $v \in E_1$.
   Réciproquement, $Mv = 0 \Rightarrow v \geq 0$ et $M(-v) = 0 \Rightarrow -v \leq 0$, donc nécessairement $v = 0$, donc M est inversible.
   Posons $M^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq}$. Montrons que $(M^{-1}\varepsilon_i | \varepsilon_j) = a_{ij} \geq 0$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ ($(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Il existe $v_i = (v_i^1, v_i^2, ..., v_i^n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varepsilon_i = Mv_i \geq 0$, donc par hypothèse $v_i \geq 0$ et par conséquent $b_{ij} = (M^{-1}\varepsilon_i | \varepsilon_j) = (M^{-1}Mv_i | \varepsilon_j) = v_i^j \geq 0$.
2. Puisque $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est positive, alors $a_{ij} \geq 0$ our tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, et donc

$$\|M\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \|Me_n\|_\infty.$$

3. (a) D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $A_\lambda v \geq 0$ pour tout $v \geq 0$, on a :

$$A_\lambda v = \begin{pmatrix} (2+\lambda)v_1 - v_2 - v_0 \\ (2+\lambda)v_2 - v_1 - v_3 \\ \vdots \\ (2+\lambda)v_{n-1} - v_{n-2} - v_n \\ (2+\lambda)v_n - v_{n-1} - v_{n+1} \end{pmatrix}, \ \text{ avec } \ v_0 = v_{n+1} = 0.$$

Soit $v_{i_0} = \min\limits_{i=1}^{n} v_i$. Si $v_{i_0} = v_0 = 0$, alors $v_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et donc $v \geq 0$. Si $i_0 > 0$ alors $(\lambda + 2)v_{i_0} \geq v_{i_0-1} + v_{i_0+1} \geq 2v_{i_0}$ et donc $\lambda v_{i_0} \geq 0$, si $\lambda \neq 0$, $v_{i_0} \geq 0$ et donc $v \geq 0$, si $\lambda = 0$, alors $2v_{i_0} \geq v_{i_0-1} + v_{i_0+1} \geq 2v_{i_0}$, donc nécessairement $v_{i_0-1} = v_{i_0+1} = v_{i_0}$, ceci entraîne $v_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et donc $v \geq 0$.
Dans tous les cas on a $v \geq 0$, donc A_λ est monotone.

(b) On a $A_\lambda - A_0 = (2+\lambda)I_n + B_n - 2I_n - B_n = \lambda I_n$, donc $A_\lambda - A_0$ est positive. D'autre part, $A_0^{-1} - A_\lambda^{-1} = A_0^{-1}(A_\lambda - A_0)A_\lambda^{-1}$, donc $A_0^{-1} - A_\lambda^{-1} \geq 0$.

(c) On a $A_\lambda^{-1} \leq A_0^{-1}$ et donc $A_\lambda^{-1}e_n \leq A_0^{-1}e_n$, d'où $\|A_\lambda^{-1}e_n\|_\infty \leq \|A_0^{-1}e_n\|_\infty$ et par conséquent $\|A_\lambda^{-1}\|_\infty \leq \|A_0^{-1}\|_\infty$.

PARTIE III : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $-u'' + \alpha u = f$ est l'ensemble des fonctions de la forme :
$$u : x \mapsto A\cos\sqrt{(}-\alpha)x + B\sin(\sqrt{-\alpha})x + \frac{f}{\alpha}.$$
Pour qu'il y ait une unique solution, il faut et il suffit que le système linéaire d'ordre 2 :
$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit} \quad \begin{cases} A & = \frac{-f}{\alpha} \\ A\cos(\sqrt{-\alpha}) + B\sin(\sqrt{-\alpha}) & = \frac{-f}{\alpha} \end{cases}$$
soit de Cramer. On calcule son déterminant Δ :
$$\Delta = \sin(\sqrt{-\alpha}) \text{ et } \Delta \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\alpha} \notin \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \neq -\pi^2 k, \quad k \in \mathbb{N}^*$$
Donc pour tout $\alpha \in \Lambda = \mathbb{R}\backslash\{-\pi^2k^2/k \in \mathbb{N}^*\}$, le problème $(\mathscr{P})$ peut n'avoir aucune solution ou une infinité, en effet, si $\alpha = -\pi^2k^2, \quad k \in \mathbb{N}$, le système précédent s'écrit :
$$\begin{cases} A & = \frac{-f}{\alpha} \\ (-1)^k A & = \frac{-f}{\alpha} \end{cases}$$
Si $f = 0$, on trouve la famille de solutions $x \mapsto B\sin(k\pi x)$, $B \in \mathbb{R}$, si $f \neq 0$ et $k = (2p+1)$ il n'y a pas de solutions, et si $f \neq 0$ et $k = 2p$, on trouve la famille des solutions $x \mapsto \frac{-f}{\alpha}\cos(2p\pi x) + B\sin(2p\pi x) + \frac{f}{\alpha}, \quad B \in \mathbb{R}$.

2. (a) La formule de Taylor à l'ordre 4 s'écrit entraîne :
$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\beta_i^1), \quad \beta_i^1 \in]x_{i-1}, x_i[$$
et
$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\beta_i^2), \quad \beta_i^2 \in]x_i, x_{i+1}[.$$
D'où
$$u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) = h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{12}\left[\frac{u^{(4)}(\beta_i^1) + u^{(4)}(\beta_i^2)}{2}\right].$$
Puisque $\dfrac{u^{(4)}(\beta_i^1) + u^{(4)}(\beta_i^2)}{2} \in u^{(4)}[\beta_i^1, \beta_i^2]$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$ tel que $\dfrac{u^{(4)}(\beta_i^1) + u^{(4)}(\beta_i^2)}{2} = u^{(4)}(\beta_i)$. D'où le résultat.

(b) Les formules $u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) = h^2u''(x_i) + \dfrac{h^4}{12}u^{(4)}(\beta_i)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$ s'écrivent sous la forme matricielle :
$$\begin{pmatrix} 2+\alpha h & -1 & & & & \\ -1 & 2+\alpha h & -1 & & & \\ & -1 & 2+\alpha h & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2+\alpha h & -1 \\ & & & & -1 & 2+\alpha h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \\ u(x_n) \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix} + \frac{h^4}{12}\begin{pmatrix} u^{(4)}(\beta_1) \\ u^{(4)}(\beta_2) \\ u^{(4)}(\beta_3) \\ \vdots \\ u^{(4)}(\beta_{n-1}) \\ u^{(4)}(\beta_n) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $A_\lambda(X_n) = Y_n + Z_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \\ u(x_n) \end{pmatrix}$, $Y_n = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

et $Z_n = \dfrac{h^4}{12} \begin{pmatrix} u^{(4)}(\beta_1) \\ u^{(4)}(\beta_2) \\ u^{(4)}(\beta_3) \\ \vdots \\ u^{(4)}(\beta_{n-1}) \\ u^{(4)}(\beta_n) \end{pmatrix}$.

De plus
$$\|Z_n\|_\infty \leq \frac{M_0 h^4}{12} = \frac{M_0}{12(n+1)^4}.$$

3. (a) Dans ce cas l'équetion différentielle s'écrit : $u'' = -1$ avec $u(0) = u(1) = 0$, on trouve donc $u(x) = \dfrac{1}{2}x(1-x)$. Il est clair que $Z_n = 0$ et $M_0 = 0$, $\overline{X}_n = A_\lambda^{-1}(Y_n) = X_n$ avec
$$X_n = (u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n)) = \left(\frac{n}{2(n+1)^2}, \frac{2(n-1)}{2(n+1)^2}, \frac{3(n-2)}{2(n+1)^2}, ..., \frac{n}{2(n+1)^2}\right)$$

(b) On a $A_0^{-1}(Y_n) = h^2 A_0^{-1}(e_n) = X_n$, donc $h^2 8 |A_0^{-1} e_n\|_\infty = \max\limits_{i=1}^{n} |u(x_i)| \leq \dfrac{1}{8}$, d'où :
$$\|A_0^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8h^2} = \frac{(n+1)^2}{8}.$$

Dans la question 3. de la partie I, on a : $\|A_0^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{4\sin^2 \dfrac{\pi}{2(n+1)}} \simeq \dfrac{(n+1)^2}{\pi^2}$.

(c) On a $X_n = A_\lambda^{-1}(Y_n) + A_\lambda^{-1}(Z_n) = \overline{X}_n + A_\lambda^{-1}(Z_n)$, d'où :
$$\begin{aligned} \|X_n - \overline{X}_n\| &\leq \|A_\lambda^{-1}\|_\infty \|Z_n\|_\infty \\ &\leq \|A_0^{-1}\|_\infty \|Z_n\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{8}\frac{1}{12}\frac{M_0}{(n+1)^4}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\sup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |u(x_i) - a_i| \leq \dfrac{M_0}{96(n+1)^4}$.

• • • • • • • • •