Corrigé du devoir libre $n°7$

M.Tarqi

• • • • • • • • •

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. Posons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, donc on peut écrire : $1 + \frac{z}{n} = r_n e^{i\theta_n}$ où $r_n = \left|1 + \frac{z}{n}\right|$ et $\theta_n = 2\arctan \frac{\frac{y}{n}}{r_n + 1 + \frac{x}{n}}$, pour $n > |z|$, on a :
$$\ln r_n^n = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = x + o(1)$$
et
$$n\theta_n = 2n\left(\frac{y}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = y + o(1).$$
Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x e^{iy} = e^z$.

2. Posons $\exp(A) - \left(I_n + \frac{1}{p}A\right)^p = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, avec $a_k = \frac{1}{k!}$ si $k > p$ et $\forall k = 0, 1, ..., p$,
$$a_k = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{p^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{p}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\right) \geq 0$$
la suite $(a_k)_k$ étant à termes positifs, on peut donc écrire :
$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\| = e^{\|A\|} - \left(\|I_n\| + \frac{1}{p}\|A\|\right)^p$$
et comme $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\|I_n\| + \frac{1}{p}\|A\|\right)^p = e^{\|A\|}$, alors $\lim\limits_{p\to\infty}\left(1 + \frac{1}{p}A\right)^p = \exp(A)$.

3. Soit $R > 0$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|A\| < R$ donc, comme en 2., on a :
$$\|\exp(A) - f_p(A)\| \leq e^R - \left(1 + \frac{1}{p}R\right)^p$$
donc il y a convergence uniforme sur toutes boules fermés centrés en O, et par conséquent sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. $\lim\limits_{p\to\infty}(A + \varepsilon_p) = A$, donc la suite $(A + \varepsilon_p)_p$ est bornée, considérons un compact K de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant tous les termes de cette suite. La suite $(f_p)_p$ converge uniformément sur K, on peut donc écrire :
$$\|f_p(A + \varepsilon_p) - \exp(A + \varepsilon_p)\| \leq \sup_{M\in K}\|f_p(M) - \exp(M)\| = \lambda_p$$
donc $\lim\limits_{p\to\infty}\lambda_p = 0$.
Par ailleurs la continuité de $\exp$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ assure que $\lim\limits_{p\to\infty}\mu_p = \lim\limits_{p\to\infty}\|\exp(A + \varepsilon_p) - \exp(A)\| = 0$ et comme
$$\|f(A + \varepsilon_p) - \exp(A)\| \leq \lambda_p + \mu_p$$
donc
$$\lim_{p\to\infty}\left(I_n + \frac{1}{p}(A + \varepsilon_p)\right)^p = \exp(A).$$
Si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire :
$$f_p(A)f_p(B) = \left[\left(I_n + \frac{1}{p}A\right)\left(I_n + \frac{1}{p}B\right)\right]^p = \left(I_n + \frac{1}{p}(A+B) + \frac{1}{p^2}AB\right)^p = \left(I_n + \frac{1}{p}\left(A + B + \frac{1}{p}AB\right)\right)^p$$
ainsi $\lim\limits_{p\to\infty} f_p(A)f_p(B) = \exp(A+B)$ d'où :
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

• • • • • • • • •