Corrigé du devoir libre $n°8$

M.Tarqi

•••••••••••

Partie I. Calcul de la somme d'une série convergente

1. Une intégration par parties, montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

2. Puisque $t \neq 2k\pi$, alors $e^t \neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m e^{int} &= e^{it}\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}\\ &= e^{it}\frac{e^{\frac{imt}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}}\frac{e^{\frac{-imt}{2}} - e^{\frac{int}{2}}}{e^{\frac{-it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = e^{i(m+1)\frac{t}{2}}\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}},\end{aligned}$$

et

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^m e^{int}\right) = \frac{\cos(m+1)\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

3. Une intégration par parties donne

$$\int_0^\pi u(t)\sin\lambda t dt = \frac{1}{\lambda}\left[u(0)\ \cos 0 - f(\pi)\ \cos(\lambda\pi) + \int_0^\pi u'(t)\cos\lambda t dt\right].$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, le fait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ |\cos t| \leq 1$ et l'inégalité du cours $\left|\displaystyle\int_0^\pi u\right| \leq \displaystyle\int_0^\pi |u|$, on obtient la majoration

$$\left|\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)dt\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(|u(0)| + |u(\pi)| + \int_0^\pi |u'(t)dt|\right),$$

donc une inégalité de la forme $\left|\displaystyle\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\ dt\right| \leq \dfrac{C}{|\lambda|}$, où C est une constante indépendante de n, ce qui permet de conclure.

4. Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et que $\forall t \in]0,\pi]$, $f'(t) = \dfrac{\left(\dfrac{t}{\pi} - 1\right)2\sin\dfrac{t}{2} - \left(\dfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos\dfrac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}}$
   - $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = -1 = f(0)$, donc f est continue sur $[0,\pi]$
   - $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \frac{1}{2\pi}$, donc f est dérivable en 0, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, d'après le théorème du prolongement de la dérivée.

5. D'après la question 1., on peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{n=1}^m \cos(nt)dt$, mais

$$\sum_{n=1}^m \cos(nx) = \frac{\cos(m+1)\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2m+1)\dfrac{t}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)};$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2m+1)\dfrac{t}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right]dt = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}dt$. On obtient, en utilisant le résultat de la question 3. (lemme de Riemann),

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \lim_{m\to\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie II- Etude d'une somme de série de fonctions

1. Posons $u_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Si $x > 0$ on a $0 \leq u_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} \sim \dfrac{x}{n^2}$. Donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ converge. Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(0)$ converge. Ainsi la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. On a évidement $S(0) = 0$ et $S(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{1+m}\right) = 1$.
3. $S(n) - S_n(n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+n}\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{n}{k(k+n)} \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{n}{k(k+n)} \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{n}{2n(2n+n)} \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{6n} = \dfrac{1}{6}$.
   Donc il est impossible de majorer uniformément $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ sur $[0, +\infty[$. La série n'est pas uniformément convergente sur $[0, +\infty[$.
4. (a) Pour $x \in [0, A]$, on a $|u_n(x)| \leq u_n(A)$. Il y a convergence normale et convergence uniforme sur $[0, A]$.
   (b) Les applications u_n sont continues sur $[0, A]$ et la convergence est uniforme, donc on peut appliquer le théorème de continuité : La somme S est continue sur $[0, A]$ et ceci pour tout $A > 0$, donc elle est continue sur $[0, +\infty[$.
5. (a) L'inégalité $\dfrac{1}{(n+x)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ qui est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, montre que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{(n+x)^2}$ converge normalement et donc uniformément sur $[0, +\infty[$.
   (b) On a $\forall x \geq 0$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$. Donc la série des dérivées $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n'$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ et comme les u_n sont dérivables sur $[0, +\infty[$, donc elle est de même de la fonction S (d'après le théorème de dérivation) et $\forall x \in [0, +\infty[$, $S'(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{(n+x)^2}$.
6. On a pour tout $x \geq 0$, $u_n''(x) = \dfrac{-2}{(n+x)^3}$. Donc la série des dérivées $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n''$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$, puisque $|u_n''(x)| \leq \dfrac{2}{n^3}$, donc la fonction S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$,
   $$S''(x) = -2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(n+x)^3} < 0$$
   et par conséquent S est concave sur $[0, +\infty[$.
7. (a) Pour $a \geq 1$, on a : $\int_1^a \varphi(t) = \ln a - \ln(a+x) - \ln(1+x) = \ln\left(\dfrac{a}{a+1}\right) + \ln(1+x)$, dont $\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt$ existe et vaut $\ln(1+x)$.
   (b) La fonction φ étant décroissante, donc on obtient facilement l'inégalité $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1}\varphi(t)dt \leq \varphi(n)$, d'où $\sum\limits_{n=1}^{m}\varphi(n+1) \leq \int_1^{m+1}\varphi(t) \leq \sum\limits_{n=1}^{m}\varphi(n)$. L'inégalité demandée est obtenu par passage à la limite $m \to \infty$.
   (c) L'inégalité précédente s'écrit encore sous la forme, pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq S(x) \leq 1 + \ln(1+x)$. Donc $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{S(x)}{\ln x} = 1$, et par suite $S(x) \sim \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Le tableau suivant résume la variation et la concavité de la fonction S sur $[0, +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$S''(x)$		$+$	
$S'(x)$		$+$	
$S(x)$	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

•••••••••