Devoir libre $n°1$

Correction

• • • • • • • • •

EXERCICE 1 : **Étude de la suite géométrique** $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **où** $z \in \mathbb{C}$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$z^n = |z|^n(\cos(\theta n) + i\sin(\theta n)).$$

Pour que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge il faut et il suffit que les suites réelles définies par :

$$a_n = |z|^n(\cos(\theta n) \quad \text{et} \;\; b_n = |z|^n\sin(\theta n))$$

convergent. Ces deux suites convergent dans les deux cas suivants :

i. $|z| < 1$;

ii. $|z| = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$.

Étude de cas (ii) se ramène à l'étude des suites de termes généraux : $u_n = \cos(n\alpha+\varphi)$ et $v_n = \sin(n\alpha+\varphi)$.

1. Supposons que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent et admettent des limites u et v.
   On a :
   $$u_{n+1} + u_{n-1} = \cos(n\alpha+\varphi) + \cos(n\alpha-\varphi) = 2\cos(n\alpha+\varphi)\cos(\alpha)$$
   $$v_{n+1} + v_{n-1} = \sin(n\alpha+\varphi) + \sin(n\alpha-\varphi) = 2\sin(n\alpha+\varphi)\sin(\alpha)$$
   Donc on a :
   $$u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n\cos(\alpha) \quad (1)$$
   $$v_{n+1} + v_{n-1} = 2v_n\sin(\alpha) \quad (2)$$
   $$u_n^2 + v_n^2 = 1 \quad (3)$$
   Par passage à la limite, dans les relations précédentes, en déduit les relations
   $$u(1-\cos(\alpha)) = 0 \quad (4)$$
   $$v(1-\sin(\alpha)) = 0 \quad (5)$$
   $$u^2 + v^2 = 1 \quad (6)$$
   De (6) il résulte que u et v ne sont pas nuls tous les deux ; par suite $\cos\alpha = 0$ ou encore $\alpha = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Inversement, si $\alpha = 2k\pi$ on a $u_n = \cos\varphi, \;\; v_n = \sin\varphi$. Les deux suites convergent.
   CONCLUSION :
   Les suites $(u_n)_n$ et $v_n)_n$ ne peuvent être toutes deux convergentes que si $\alpha = 2k\pi$.
2. Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers u ; on fait aucune hypothèse sur la suite $(v_n)_n$.
   On a :
   $$v_n\sin\alpha = u_n\cos\alpha - u_{n+1} \quad (7)$$
   La suite $(v_n\sin\alpha)_n$ admet donc une limite $u(\cos\alpha-1)$. Cela implique $\sin\alpha = 0$, sinon la suite($v_n)_n$ serait convergente vers $\dfrac{u(\cos\alpha-1)}{\sin\alpha}$ et d'après 1. α serait égal à $2k\pi$, ce qui est en contradiction avec $\sin\alpha \neq 0$.
   Donc $(u_n)_n$ ne peut converger que si $\sin\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$.
   Inversement, si $\alpha = k\pi$, on a : $u_n = \cos(nk\pi+\varphi) = (-1)^{nk}\cos\varphi$.

a) Si k est pair, $u_n = \cos\varphi$ admet une limite $u = \cos\varphi$.

b) Si k est impair, $u_n = (-1)^n \cos\varphi$ n'admet une limite que si $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire $\varphi = \frac{\pi}{2} + l\pi$ avec $l \in \mathbb{Z}$, la limite dans ce cas est 0.

3. On remarque que $v_n = \cos(n\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2})$, donc, d'après 2. $(v_n)_n$ ne peut converger que que si $\alpha = k\pi$. Inversement supposons $\alpha = k\pi$.

   a) Si k est pair, $(v_n)_n)$ admet la limite $\sin\alpha$.

   b) Si k est impair, $(v_n)_n)$ n'admet une limite que si $\sin\alpha = 0$, c'est-à-dire $\varphi = l\pi\,;\ \in \mathbb{Z}$ la limite est alors 0.

CONCLUSION :
La suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, on $z = 1$ ou $|z| < 1$. Dans le cas (i) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} z^n = 0$ et dans le cas (ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} z^n = 1$.

EXERCICE 2 : **Étude des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre p**

1. Il est clair que E est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, donc est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2. Si $(y_i)_{0\leq i\leq p}$ sont $p+1$ scalaires quelconques de $\mathbb{C}^{p+1}$, il existe une unique suite de E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall i \in \{0, 1, ..., p\}, \quad x_i = y_i$$

Il en résulte que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^{p+1} \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_0, x_1, ..., x_p) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier E est de dimension finie et $\dim E = p + 1$.

3. On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E, de plus si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = 0$, alors la relation de récurrence permet de déduire que $\alpha_0 x_0 = 0$, donc f est injectif si, et seulement si, $\alpha_0 \neq 0$.

4. La suite géométrique $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ est dans E si, et seulement si, pour tout entier naturel n, on a :

$$\lambda^{n+p+1} = \alpha_0\lambda^n + ... + \alpha_{p-1}\lambda^{n+p-1} + \alpha_p\lambda^{n+p}$$

ou encore

$$\lambda^{p+1} - \alpha_p\lambda^p - ... - \alpha_1\lambda - \alpha_0 = 0.$$

5. Il suffit de vérifier que la famille de $p+1$ éléments $(\lambda_0^n)_{n\geq 0}, (\lambda_1^n)_{n\geq 0}, ..., (\lambda_p^n)_{n\geq 0}$ est libre. Soit $a_0, a_1, ..., a_p$ des scalaires tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{i=0}^{p} a_i\lambda_i^n = 0$, alors en particulier, on obtient, pour $n = 0, 1, ..., p$, le système de Vandermonde suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 + ... + a_p = 0 \\ a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + ... + a_p\lambda_p = 0 \\ \vdots \\ a_0\lambda_0^p + a_1\lambda_1^p + ... + a_p\lambda_p^p = 0 \end{array}\right.$$

Donc $a_0 = a_1 = ... = a_p = 0$, puisque les λ_i sont deux à deux distincts.
L'équation caractéristique associée s'écrit $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, dont les racines sont $1, 2, 3$, donc les suites réelles vérifiant (3) sont les suites de terme générale $u_n = a1^n + b2^n + c3^n$ avec a, b et c des constantes réelles.

6. Si λ est une solution double de $p(x) = x^{p+1} - \alpha_p x^p - ... - \alpha_1 x - \alpha_0$, il est aussi solution double de $q(x) = x^n p(x) = x^{n+p+1} - \alpha_p x^{n+p} - ... - \alpha_1 x^{n+1} - \alpha_0 x^n$. Ainsi

$$0 = \lambda q'(\lambda) = (n+p+1)\lambda^{n+p+1} - \alpha_p (n+p)\lambda^{n+p} - ... - \alpha_1 (n+1)\lambda^{n+1} - \alpha_0 n \lambda^n,$$

   et par conséquent la suite $(n\lambda^n)_{n\geq 0}$ est bien dans E.
   L'équation caractéristique associée s'écrit $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, avec 2 racine double et 1 racine simple, donc les suites réelles vérifiant (4) sont les suites de terme générale $u_n = a1^n + b2^n + cn2^n = a + (b+cn)2^n$ avec a, b et c des constantes réelles.

7. De manière générale, si λ est une racine d'ordre $p+1$ de p, alors il est de même pour q, ainsi pour $j = 0, 1, ..., p$,

$$0 = \lambda^j q^{(j)}(\lambda) = (n+p+1)(n+p)...(n+p+1-j+1)\lambda^{n+p+1} + ... + \alpha_0 n(n-1)...(n-j+1)x^n$$

   donc les suites $v_j = (n(n-1)...(n-j+1)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(j = 0, 1, 2, ..., p)$ sont des éléments de E.
   Montrons que les suites $\{v_0, v_1, ..., v_p\}$ forment une base de E. Posons

$$a_0 v_0 + a_1 v_1 + ... + a_p v_p = 0$$

   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_0 \lambda^n + a_1 n \lambda^n + ... + a_p n(n-1)...(n-p+1)\lambda^n = 0$$

   Donc

$$-a_0 = a_1 n + n(n-1)a_2 + ... + a_n n(n-1)...(n-p+1).$$

   Or a_0 est une constante et la partie droite de l'équation n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$. Aussi $a_0 = 0$ et

$$0 = a_1 n + n(n-1)a_2 + ... + a_n n(n-1)...(n-p+1).$$

   On simplifie par n et on recommence pour montrer que tous les scalaires $a_1, a_2, ..., a_p$ sont nuls.
   Appelons $\{w_0, w_1, ..., w_p\}$ les suites définies par $w_j = (n^j \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La matrice de passage de $\{v_0, v_1, ..., v_p\}$ à $\{w_0, w_1, ..., w_p\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   Elle est triangulaire supérieure de diagonale formée de 1. Elle est donc inversible et la famille $\{w_0, w_1, ..., w_p\}$ est une base de E. Dans ce cas la solution générale de (1) est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme générale est de la forme

$$x_n = a_0 \lambda^n + a_1 n \lambda^n + ... + n^p \lambda^n,$$

   où les a_i sont des constantes.

●●●●●●●●●●●