Devoir libre $n°2$
Correction

•••••••••

Partie I

1. a) Soit $a \in \varepsilon(A)$, et soient $(a_1, a_2) \in A^2$ tel que $a = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Si on avait $a_1 \neq a_2$, alors $a_1 \neq a$ et $a_2 \neq a$, car $a_1 = a \Leftrightarrow a_2 = a$, donc $a_1, a_2 \in A \backslash \{a\}$, d'où $[a_1, a_2] \subset A \backslash \{a\}$. Mais $a \in [a_1, a_2]$, d'où la contradiction.
Finalement, on a bien : $a \in \varepsilon(A) \Rightarrow \mathscr{P}_a$.

   b) Soit $a \notin \varepsilon(A)$. Alors $A \backslash \{a\}$ non convexe, ce qui s'écrit :
$$\exists (a_1, a_2) \in (A \backslash \{a\})^2, \;\; a_1 \neq a_2 \;\text{ tel que }\; [a_1, a_2] \not\subset A \backslash \{a\} \;\; (1)$$
Mais, puisque $(a_1, a_2) \in A^2$ et que $A$ est convexe, on a :
$$[a_1, a_2] \subset A \;\; (2).$$
D'après (1) et (2) on a $a \in [a_1, a_2]$ et donc il existe $t \in [0, 1]$ tel que $a = ta_1 + (1-t)a_2$. Mais les cas $a_1 = a_2$ ou $t = 0$ ou $t = 1$ sont impossibles ( car $a_1 \neq a$ et $a_2 \neq a$ ).
On a donc bien :
$$\exists (a_1, a_2) \in A^2, \;\; a_1 \neq a_2 \;\text{ et }\; \exists t \in ]0, 1[ \;\text{ tel que }\; a = ta_1 + (1-t)a_2.$$

   c) Soit $a \notin \varepsilon A$. On construit alors $a_1$ et $a_2$ et $t$ comme dans la question précédente. On peut trouver facilement $b_1, b_2 \in [a_1, a_2]$, $b_1 \neq b_2$ tels que $a = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$. On donc montré :
$$a \notin \varepsilon(A) \Rightarrow \text{non}\mathscr{P}_a,$$
soit encore
$$\mathscr{P}_a \Rightarrow a \in \varepsilon(A).$$
Finalement,
$$a \in \varepsilon(A) \Leftrightarrow \mathscr{P}_a.$$

2. a) Soient $a, b \in B_N$ et $t \in [0, 1]$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :
$$N(ta + (1-t)b) \leq tN(a) + (1-t)N(b) \leq 1$$
donc $ta + (1-t)b \in B_N$.
Ainsi $[a, b] \subset B_N$ et $B_N$ est convexe.

   b) Soit $a \in \mathscr{E}(B_N)$. Puisque $\mathscr{E}(B_N) \subset B_N$, on a déjà $N(a) \leq 1$. On ne peut pas avoir $a = 0$, car $B_N \backslash \{0\}$ n'est pas convexe. Soit donc $a_1 = \dfrac{a}{N(a)}$ on a $N(a_1) = 1$ et donc $a_1 \in B_N$ et soit $a_2$ tel que $a = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$ ( $a_2 = 2a - a_1 = \dfrac{2N(a) - 1}{N(a)}a$ ). Alors $N(a_2) = \frac{2N(a)-1}{N(a)}N(a)2N(a) - 1 \leq 1$, donc $a_2 \in B_N$.
Ainsi $a = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$ avec $(a_1, a_2) \in B_N^2$. Puisque $a \in \mathscr{E}(B_N)$, $\mathscr{P}_a$ est vraie, donc $a_1 = a_2$. D'où $a = a_1 = a_2$ et $a \in S_N$.
Finalement, $\mathscr{E}(B_N) \subset S_N$.

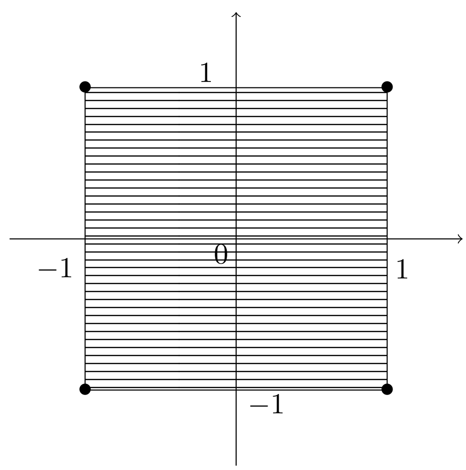
c) Soient $a_1, a_2 \in B_N$ tels que $a_1 \neq a_2$, et supposons $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \in S_N$, c'est-à-dire $N(a) = 1$, soit encore $N(a_1 + a_2) = 2$. Puisque $N(a_1 + a_2) \leq N(a_1) + N(a_2) \leq 2$, on a donc nécessairement $N(a_1) = N(a_2) = 1$, d'où $a_1, a_2 \in S_N$.
Supposons qu'il existe $(a, b) \in S_N^2$, $a \neq b$, tels que $[a, b] \subset S_N$. Alors, si $c = \frac{1}{2}(a + b)$, $c \in [a, b]$ donc $c \in S_N$. On a donc non$(\mathscr{P}_c)$, c'est-à-dire $c \notin \mathscr{E}(B_N)$. Ainsi $\mathscr{E}(N) \subsetneq S_N$, ce qui démontre l'implication $(\Longleftarrow)$.
Réciproquement, supposons $\mathscr{E}(N) \subsetneq S_N$. Cela signifie qu'il existe $a \in S_N$ et $a \notin \mathscr{E}(B_N)$, soit $a \in S_N$ et non$(\mathscr{P}_a)$, soit $a \in S_N$ et il existe $(a_1, a_2) \in B_N^2$, $a_1 \neq a_2$ tels que $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. D'après la question précédente, on a $a_1, a_2 \in S_N$.
Montrons que $[a_1, a_2] \subset S_N$. Soit $x \in [a_1, a_2]$, si $x = a_1$ ou $x = a_2$ ou $x = a$, on a bien $x \in S_N$, sinon, soit $y = 2a - x$, c'est-à-dire $a = \frac{x + y}{2}$.
On a alors $x \neq y$, $(x, y) \in B_N^2$ et $a = \frac{x + y}{2}$. D'après la question précédente, $x \in S_N$, ce qui démontre l'implication $(\Longrightarrow)$.

d) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la norme $\|.\|_\infty$ telle que $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. On a :

$$B_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1 \quad et \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

et

$$S_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}2 / |x| = 1 \quad et \quad |y| = 1\}.$$




Il est facile de vérifier que $\mathscr{E}(B_N) = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$.
Donc $\mathscr{E}(B_N) \subsetneq S_N$.

3. a) $C$ est d'intérieur non vide, donc il existe $a \in C$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset C$. $C$ étant symétrique par rapport à 0, on en déduit que $B(-a, r) \subset C$ et, par convexité, que $B(0, r) \subset C$, en effet, si $x \in B(0, r)$, $x = \frac{1}{2}[(a + x) + (x - a)]$ avec $a + x \in B(a, r)$ et $x - a \in B(-a, r)$.
Ainsi, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$, d'où $C$ est un voisinage de 0.

b) Deux cas sont possibles :
- ☐ Si $x = 0$, on a $\{\lambda > 0 / x \in \lambda.C\} = ]0, +\infty[$, puisque $0 \in C$.
- ☐ Si $x \neq 0$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. Soit alors $c = \frac{r}{2\|x\|}x$. Alors $c \in B(0, r)$ donc $c \in C$ et $x = \lambda.c$ avec $\lambda = \frac{2\|x\|}{r}$.

On a montré dans tous les cas qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda.C$. Donc $\{\lambda > 0 / x \in \lambda.C\}$ est non vide.

c) Ce qui précède permet de démontrer que la définition de $j_C$ a bien un sens, car $\{\lambda > 0/x \in \lambda.C\}$ est une partie non vide minorée ( par 0) de $\mathbb{R}$, donc se borne inférieure existe.
• $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $j_C(x) \geq 0$ d'après ce qui précède.
• Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $j_C(x) = 0$. Par définition de la borne inférieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda \in ]0, \varepsilon[ \text{ tel que } x \in \lambda.C.$$

Or $C$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall c \in C$, $\|c\| \leq M$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda \in ]0, \varepsilon[ \text{ tel que } \|x\| \leq \lambda M$$

D'où $\forall \varepsilon > 0$, $\|x\| \leq \varepsilon M$. Ainsi $\|x\| = 0$ puis $x = 0$.
• Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} j_C(\mu x) &= \inf\{\lambda > 0/\mu x \in \lambda.C\} \\ &= \inf\{\lambda > 0/x \in \frac{\lambda}{\mu}.C\} \end{aligned}$$

Or $x \in \dfrac{\lambda}{\mu}.C \iff x \in \dfrac{\lambda}{|\mu|.C}$, car $C$ est symétrique par rapport à 0.
Donc $j_C(\mu x) = \inf\{|\mu|\lambda' \in \mathbb{R}_*^+, \;\; x \in \lambda'.C\}$, en posant $\lambda' = \dfrac{\lambda}{|\mu|}$. Soit finalement :

$$\begin{aligned} j_C(\mu x) &= |\mu| \inf\{\lambda' \in \mathbb{R}_+^*, \;\; x \in \lambda'.C\} \\ &= |\mu| j_C(x) \end{aligned}$$

et cette égalité reste évidement vraie pour $\mu = 0$.
• Soient enfin $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pour tous $\lambda, \mu > 0$ tels que $x \in \lambda.C$ et $y \in \mu.C$, on a $x = \lambda c$ et $y = \mu c'$ avec $(c, c') \in C^2$. D'où

$$x + y = \lambda c + \mu c' = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} c + \frac{\mu}{\lambda + \mu} c'\right) \in (\lambda + \mu).C$$

Donc, par définition de $j_C$ : $j_C(x + y) \leq \lambda + \mu$. Cette inégalité étant valable pour tous $\lambda$ et $\mu$ tels que $x \in \lambda.C$ et $y \in \mu.C$. On en déduit

$$j_C(x + y) \leq j_C(x) + j_C(y).$$

Tout ce qui précède montre que $j_C$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

d) Si $x \in C$, $x \in 1.C$ d'où $j_C(x) \leq 1$. Ainsi $C \subset B_{j_C}$.
Soit $x \in \overset{\circ}{\widehat{B}}_{j_C}$, c'est-à-dire $j_C(x) < 1$. Par définition de la borne supérieure, il existe $\lambda > 0$ tel que $j_C(x) \leq \lambda < 1$ et $x \in \lambda.C$, soit $x = \lambda.c$ avec $c \in C$. On a alors $x \in [0, c]$ d'où $x \in C$ puisque $C$ est convexe. D'où

$$\overset{\circ}{\widehat{B}}_{j_C} \subset C \subset B_{j_C}.$$

Donc $\overline{\overset{\circ}{\widehat{B}}_{j_C}} \subset \overline{C} \subset \overline{B_{j_C}}$. Mais $\overline{\overset{\circ}{\widehat{B}}_{j_C}} = B_{j_C} = \overline{B_{j_C}}$ et $C = \overline{C}$ d'où, en conclusion $C = B_{j_C}$.

Partie II

1. Si $N$ est eculidienne, alors $\mathscr{P}_N$ est vraie, c'est une propriété qui découle directement du cours, cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

2. a) Supposons $\mathscr{P}_N$ vérifiée. On sait déjà que $\mathscr{E}(B_N) \subset S_N$ d'après I.2.b. Si $\mathscr{E}(B_N) \neq S_N$, il existe $(a,b) \in S_N^2$ tel que $a \neq b$ et $[a,b] \subset S_N$ d'après I.2.c. On aurait alors $\frac{1}{2}(a+b) \in S_N$ soit

$$N(a+b) = 2 = N(a) + N(b).$$

Donc, d'après $\mathscr{P}_N$, $\{a,b\}$ est lié.
Mais $a, b$ étant de norme 1, cela implique $a = \pm b$. Or le cas $a = b$ est exclu, donc $a = -b$ puis $\frac{1}{2}(a+b) = 0 \in S_N$.
D'où la contradiction, finalement $\mathscr{E}(B_N) = S_N$.

b) Soient $f$ et $g$ comme dans l'énoncé, et soient $a, b \geq 0$ tels que $a < 1 < b$. Alors il existe $t \in ]0,1[$ tel que $1 = ta + (1-t)b$ et

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & f(ta + (1-t)b) \\ & \leq & tf(a) + (1-t)f(b) \\ & \leq & tg(a) + (1-t)g(b) \\ & = & g(ta + (1-t)b) = g(1) \end{array}$$

Puisque $f(1) = g(1)$, les inégalités ci-dessus sont des égalités. On en déduit

$$f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b),$$

ou encore $t[g(a) - f(a)] = (1-t)[f(b) - g(b)]$ et comme $g(a) \geq f(a)$ et $f(b) \leq g(b)$ alors $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.
On a donc bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = g(x).$$

c)
- Il est facile de montrer que $f$ et $g$, définies dans l'énoncé, vérifient bien les hypothèses de la question précédente.
  On en déduit alors $f = g$, c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, \ \ N(a + tu) = N(u) + tN(v).$$

- Si on pose donc $w = \frac{1}{N(v)}v$, on a $w \in S_N$ et

$$N(u+w) = N\left(u + \frac{1}{N(v)}v\right) = N(u) + 1 = N(u) + N(w) = 2.$$

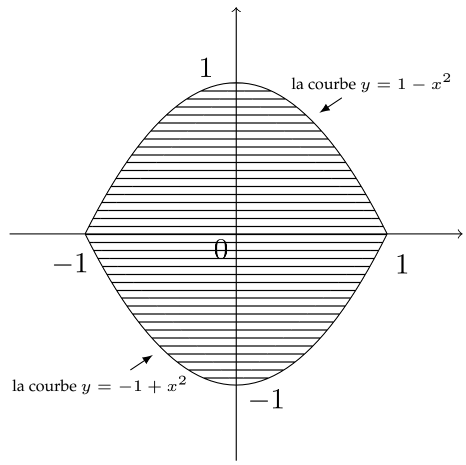
  Donc $u \in S_N$, $w \in S_N$ et $\frac{1}{2}(u+w) \in S_N$. Puisque $S_N = \mathscr{E}(B_N)$, on déduit de I.1 : $u = w$.

d) On suppose encore $\mathscr{E}(B_N) = S_N$. Soient $x, y$ tels que $N(x+y) = N(x) + N(y)$. On veut donc démontrer que $\{x,y\}$ est lié.
- c'est immédiat si $x = 0$ ou $y = 0$,
- sinon, posons $u = \frac{1}{N(x)}x$ et $v = \frac{1}{N(x)}y$. Alors $N(u) = 1$ et

$$N(u+v) = N\left(\frac{x+y}{N(x)}\right) = \frac{1}{N(x)}N(x+y) = \frac{1}{N(x)}[N(x) + N(y)] = 1 + N\left(\frac{y}{N(x)}\right) = 1 + N(v)$$

  D'après la question précédente, $u = \frac{1}{N(v)}v$, donc $\{u,v\}$ liée, il est de même pour $\{x,y\}$.
  Conclusion : on a donc démontré $(2) \Longrightarrow (1)$ et finalement $(1) \Longleftrightarrow (2)$.

3. a) $C$ est la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \pm 1$ et les paraboles d'équations $y = \pm(1 - x^2)$.




b) On peut $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ où :

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1\}$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq -1\}$$

$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 1 - x^2\}$$

$$C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - 1\}$$

$C_1$ et $C_2$ sont convexes : ce sont des demi-plans.
$C_3$ et $C_4$ sont convexes : en effet, si $f$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ on sait que son épigraphe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi $C$, intersection de parties convexes, est une partie convexe.
$C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$ sont des fermés. En effet, par exemple, $C_4 = F^{-1}([0, +\infty[)$ où

$$F: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto y - x^2 + 1 \end{array}$$

donc $C_4$ est l'image réciproque par $F$ continue d'un fermé de $\mathbb{R}$, donc est fermé.
$C$ est bornée, c'est une partie de la boule unité pour la norme 2.
$\overset{\circ}{\widehat{C}} \neq \emptyset$ car, par exemple, la boule de centre $O$ et de rayon $\frac{1}{2}$ ( pour la norme 2 ) est incluse dans $C$.
Enfin, $C$ est symétrique car $(x, y) \in C \Longrightarrow (-x, -y) \in C$.

c) La partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1 \;\; et \;\; |y| < 1 - x^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, pour une raison similaire à celle ci-dessus : image réciproque d'un ouvert par une application continue. Et c'est le plus grand ouvert inclus dans $C$, car si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $|x| \leq 1$ et $|y| = 1 - x^2$, toute boule de centre $(x, y)$ rencontre à la fois $C$ et son complémentaire. Ainsi

$$S_N = B_N \backslash \overset{\circ}{\widehat{B_N}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1 \;\text{ et }\; |y| = 1 - x^2\}.$$

On a $\mathscr{E}(B_N) = S_N$, car $S_N$ ne contient aucun segment $[a, b]$ avec $a \neq b$ et on utilise alors la question I.2.c.
D'après II.2, on en déduit que $\mathscr{P}_N$ est vérifiée.

d) Soit $N$ une norme euclidienne, et $\varphi$ le produit scalaire dont elle dérive. Si $(x,y) = xe_1 + ye_2$ avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, on a :

$$\begin{aligned}
[N(x,y)]^2 &= \varphi(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) \\
&= x^2\varphi(e_1,e_1) + 2xy\varphi(e_1,e_2) + y^2\varphi(e_2,e_2) \\
&= ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{avec } a,b,c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

De plus, on doit avoir $c^2 - ab < 0$ pour que $\varphi$ soit définie positive. Ainsi

$$B_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / ax^2 + 2bxy + by^2 < 1\},$$

donc $B_N$ est l'intérieur d'une ellipse. On ne peut pas avoir $B_N = C$, donc $j_C$ n'est pas euclidienne.

• • • • • • • • • • •