Devoir libre $n°3$
Correction

PARTIE I : GÉNÉRALITÉS, EXEMPLES

1. a) Soient M et N deux matrices de E, et λ un nombre réel. Alors

$$T(\lambda M+N)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda m_{ii}+n_{ii})=\lambda\sum_{i=1}^{n}m_{ii}+\sum_{i=1}^{n}n_{ii}=\lambda T(M)+T(N).$$

Il en résulte que T est une forme linéaire.

b) On $T_U(\lambda M+N)=T(U(\lambda M+N)=T(\lambda UM+UN)=\lambda T(UM)+T(UN)=\lambda T_U(M)+T_U(N)$ donc $T_U\in E^*$.

c) $\ker T_U=H_U$ et par conséquent H_U est un sous-espace vectoriel de E.

2. a) On a $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(R)$.

b) On a $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\a+c&b+d\end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix}a+c&b+d\\a+c&b+d\end{pmatrix}=a+b+c+d$, donc $H_U=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})/a+b+c+d=0\}$.

c) $T_U(I_2)=4\neq 0$, donc $\dim \mathrm{Im}T_U\geq 1$. Mais d'autre part $\mathrm{Im}T_U\subset\mathbb{R}$, donc $\dim\mathrm{Im}T_U\leq 1$. Finalement $\dim\mathrm{Im}T_U=1$.
La dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ étant 4, et T_U étant linéaire, le théorème du rang permet d'affirmer que $\dim\ker T_U=3$. Or $\ker T_U=H_U$, donc $\dim H_U=3$.

d) La matrice $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ est inversible, car la diagonale à coefficients tous non nuls, et dans H_U, donc $H_U\cap\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})\neq\emptyset$.

PARTIE II : QUELQUES RÉSULTATS UTILES POUR LA SUITE

1. a) Posons $C=AB=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $c_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ et donc : $T(AB)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$.

b) En particulier, $T({}^tAB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}({}^tA)_{ik}b_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{ki}$.

De même , on pose $D=BA=(d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, avec $d_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}$, donc :

$$T(AB)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}d_{kk}=T(BA).$$

2. a) Si $U=0$, alors $T=0$ et $H_U=E$, donc $\dim H_U=n^2$.

b) Si U possède au moins un terme non nul. Soit (j_0,i_0) l'indice de ce terme. Comme le produit de U à droite par la matrice $E_{i_0j_0}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf celle de rang j_0, qui contient la colonne de rang i_0 de U, le seul élément diagonal non nul de ce produit est le terme diagonal d'ordre j_0, qui vaut précisément celui d'indice (j_0,i_0) de U. Il en résulte que $T(E_{i_0j_0})\neq 0$. Par suite, T_U est une forme linéaire non nulle sur E, dont le noyau H_U est de dimension n^2-1.

3. a) On a $T_{ij}(E_{kl}) = T(E_{ji}E_{kl}) = T({}^tE_{ij}E_{kl})$. D'après (I_1), on obtient la somme des produits des termes de même indice de E_{ij} et E_{kl}. Pour qu'un tel produit soit non nul, il faut et il suffit que chacun de ses facteurs soit égal à 1. Cela ne peut se produire que si $(i,j) = (k,l)$, et dans ce cas il existe dans la somme un unique produit valant 1, les autres étant nuls.
   On peut en déduire que
$$T_{ij}(E_{kl}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \end{cases}$$
   b) Supposons que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}T_{ij} = 0$. Alors en appliquant cette relation à chaque matrice E_{kl}, on obtient
$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}T_{ij}(E_{kl}) = 0$$
   Or d'après la question précédente,
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}T_{ij}(E_{kl}) = \lambda_{kl}.$$
   On en déduit que la famille des T_{ij} est libre dans E^*. Comme elle possède n^2 éléments, et que $\dim E^* = n^2$, on peut conclure que les formes T_{ij} forment une base de E^*.
4. L'application φ est clairement linéaire. De plus, elle transforme la base canonique des matrices élémentaires E_{ij} de E en la base des T_{ij}. On en conclut que φ est un isomorphisme de E vers E^*.
5. a) Par définition d'un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, la dimension de H vaut $n^2 - 1$.
   b) $A \notin H \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \cap H = \{0\}$. Or $A \neq 0$, donc $\dim \mathrm{Vect}(A) = 1$. On en déduit que la dimension de $\mathrm{Vect}(A) + H$ vaut $1 + n^2 - 1 = n^2$. Donc $H + \mathrm{Vect}(A) = E$, et finalement $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.
   c) Pour tout $M \in E$ il existe un couple unique $(M, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $M = N + \lambda A$c. On note $l(M) = \lambda$. Il est facile de vérifier que l est linéaire. Ainsi, la forme linéaire l dont la restriction à H est nulle et qui envoie A sur 1 admet bien H comme noyau.
   d) Soit U l'antécédent de l par φ. On a alors $H = \ker l = \ker T_U = H_U$. Donc il existe $U \in E$ tel que $H = H_U$.

PARTIE III : LE RÉSULTAT GÉNÉRAL

1. a) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P envoie la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sur la famille $(e_2, e_3, ..., e_{n-1}, e_1)$. Il transforme donc une base de $\mathbb{R}^n$ en une base de $\mathbb{R}^n$. Il en résulte que P est inversible.
   b) Comme ${}^tR_r = R_r$, la formule (I_1) nous permet de calculer $T_{R_r}(P) = T({}^tR_rP) = \sum_{r=1}^{r} p_{rr} = 0$. Donc $P \in H_{R_r}$.
2. D'après II.5.d., tout hyperplan H de E est de la forme H_U pour une certaine matrice non nulle U. Si on désigne par $r \in [\![1,n]\!]$ le rang de U, alors d'après 1.b., la matrice P appartient à H_{R_r}, donc $T(R_rP) = 0$. Comme R_r peut s'écrire sous la forme S_1US_2, on a $T((S_1US_2)P) = 0$. Mais $T((S_1US_2)P) = T(S_1(US_2P))$, qu'on peut d'après (I_2) aussi écrire $T((US_2P)S_1)$, puis $T(U(S_2PS_1))$. Il en résulte que $T(U(S_2PS_1)) = 0$, et par conséquent que $S_2PS_1 \in H_U = H$. Mais S_1 et S_2 étant inversibles, S_2PS_1 l'est aussi, ce qui achève la démonstration du résultat général : Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible.

• • • • • • • • •