RAPPEL : (Définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle) Soit f une application continue par morceaux de I dans E ; espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Posons :

$$\forall t \in I, \ \ f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i.$$

Les f_i sont donc des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. Alors, si a et b sont deux éléments de I, le vecteur :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i$$

ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie, on le note $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

1. On a pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$. Donc si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|ABX\| \leq \|A\|\|BX\| \leq \|A\|\|B\|\|X\|$, d'où :

$$\|AB\| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|ABX\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|B\|.$$

2. a) La série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, car $\dfrac{\|A^k\|}{k!} \leq \dfrac{\|A\|^k}{k!}$ et la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge et comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est complet, en tant qu'espace vectoriel normé de dimension fini, la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.

   b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ la suite de sommes partielles associée à la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$. Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\|S_n(A)\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

   Par passage à la limite et par continuité de l'application norme $\|.\|$, on obtient $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $BS_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{BA^k}{k!}$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{BA^k}{k!}$ existe car $\dfrac{\|BA^k\|}{k!} \leq \dfrac{\|B\|\|A\|^k}{k!}$, donc par passage à la limite et par continuité de l'application produit $(A, B) \mapsto AB$ (bilinéaire en dimension finie), on obtient l'égalité :

$$B\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k}{k!}.$$

Si A_1 et A_2 sont semblables, alors il existe une matrice P inversible telle que $A_2 = PA_1P^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(A_2) = PS_n(A_1)P^{-1}.$$

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant continue (linéaire en dimension finie), donc par passage à la limite on obtient :

$$\exp(A_2) = P\exp(A_1)P^{-1}.$$

Donc les deux matrices $\exp(A_1)$ et $\exp(A_1)$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. a) Comme A et B commutent, on a :

$$\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{i+j=k} \frac{\mathrm{C}_k^i}{k!}A^iB^j = \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|S_n(A+B) - S_n(A)S_n(B)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} - \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!} \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} \right\| \\
&= \left\| \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} \frac{A^i}{i!}\frac{A^j}{j!} \right\| \\
&\leq \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} \frac{\|A\|^i}{i!}\frac{\|A\|^j}{j!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(\|A\|+\|B\|)^k}{k!} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n} \frac{\|A\|^i}{i!} \sum_{j=0}^{n} \frac{\|B\|^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, ce dernier terme tend vers $e^{\|A+B\|} - e^{\|A\|}e^{\|B\|} = 0$, donc

$$\lim_{n \to \infty} S_n(A+B) - S_n(A)S_n(B) = 0,$$

d'où $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. On a de même $\exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B)\exp(A)$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{D^n}{n!} = \text{diag}\left(\dfrac{1}{n!}, \dfrac{2^n}{n!}, \dfrac{3^n}{n!}\right)$, donc $\exp(D) = \text{diag}(e, e^2, e^3)$.

On a $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^3 = 0$. Donc

$$\exp(F) = I + F + \frac{F^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice E étant diagonalisable, car elle admet trois valeurs propres distinctes 1, 2 et 3. Des vecteurs propres associes sont respectivement $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,2,2)$. Donc on a l'égalité :

$$E = PDP^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d'où

$$\exp(E) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} e & e^3-e & \dfrac{e^3}{2} - e^2 + \dfrac{e}{2} \\ 0 & e^2 & e^3-e^2 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque $\exp(E) = \exp(D+F) \neq \exp(D)\exp(F)$, en effet les matrices D et F ne commutent pas.

4. a) La propriété est bien vérifiée pour $k = 0$. Supposons maintenant

$$\|(A+B)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|B\|)^k - \|A\|^k.$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \|(A+H)^{k+1} - A^{k+1}\| & = & \|(A+H)^k(A+H) - A^kA\| \\ & \leq & \|(A+H)^kA - A^kA - (A+H)^kH\| \\ & \leq & \|(A+H)^k - A^k\| + \|A+H\|^k\|H\| \\ & \leq & ((\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k)\|A\| \\ & & +(\|A\| + \|H\|)^r(\|H\| + \|A\| - \|A\|) \\ & \leq & (\|A\| + \|H\|)^k\|A\| - \|A\|^{k+1} \\ & & +(\|A\| + \|H\|)^{k+1} - (\|A\| + \|H\|)^k\|A\| \\ & = & (\|A\| + \|H\|)^{k+1} - \|A\|^{k+1} \end{array}$$

b) D'après l'inégalité précédente, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(A+H)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right\| & \leq & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(A+H)^k}{k!} - \frac{A^k}{k!}\right) \\ & \leq & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\|A\| + \|H)\|^k}{k!} - \frac{\|A\|^k}{k!}\right) \\ & \leq & e^{\|A\|}(e^{\|H\|} - 1) \end{array}$$

Quand n tend vers l'infini on obtient

$$\|\exp(A+H) - \exp(A)\| \leq e^{\|A\|}(e^{\|H\|} - 1),$$

inégalité qui montre que $\lim\limits_{H \to 0} \exp(A+H) = \exp(A)$, donc l'application exponentielle est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Reamarque : La série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$ converge normalement sur toute boule ouverte $B(0,r)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc uniformément : $\exp$ est continue sur $B(0,r)$, puis sur $\displaystyle\bigcup_{r>0} B(0,r) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. a) Posons $l(x) = xA$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f_A = \exp \circ l$; c'est une application continue comme composée d'applications continues.

   b) La série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}A^k$ converge normalement sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ ($a > 0$) puisque

$$\forall x \in [-a, a], \quad \left\| \frac{x^k}{k!}A^k \right\| \leq \frac{(a\|A\|)^k}{k!}$$

   et la série numérique $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(a\|A\|)^k}{k!}$ converge, donc on peu intégrer terme à terme :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{k!}A^k\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}A^k.$$

   D'où $f_A(x) = I_n + A\displaystyle\int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t$, ceci montre que f_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_A'(x) = Af_A(x)$. Par récurrence on montre que f_A est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f_A^{(n)}(x) = A^n f_A(x)$.

6. a) On peut montrer par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad C_\theta^{2p} = \begin{pmatrix} (-1)^p\theta^{2p} & 0 \\ 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \end{pmatrix}$$

   et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad C_\theta^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \\ (-1)^{p+1}\theta^{2p+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

   D'où

$$\exp(C_\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Posons, pour $n \geq 3$, $A_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. On a $A_\theta \neq A_{\theta+2\pi}$ cependant $\exp(A_\theta) = \exp(A_{\theta+2\pi})$, donc l'application $A \mapsto \exp(A)$ n'est pas injective.

   b) On a $\exp(A) - I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = A(I_n + S_A)$ avec $S_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}$. Par continuité $\displaystyle\lim_{A\to 0} S_A = 0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\|A\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_A\| \leq 1$.

   c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X = 0$ ou encore $TX = -X$. Si $X \neq 0$, alors $\dfrac{\|TX\|}{\|X\|} = 1$ et donc $\|T\| \geq 1$, ce qui est absurde, d'où $X = 0$.

   d) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\| \leq \alpha$ et $\exp(M) = I_n$. Donc $\exp(M) - I_n = M(I_n + S_M) = 0$, mais $\|M\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_M\| < 1$, donc $I + S_M$ est inversible et par conséquent $M = 0$.

7. a) Pour tout entier $n \geq 1$ et pour toutes matrices M et N, nous avons

$$M^n - N^n = \sum_{i=0}^{n-1}(N^iM^{n-i} - N^{i+1}M^{n-i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} N^i(M - N)N^{n-i-1},$$

d'où nous déduisons, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{g_k(x+h) - g_k(x)}{h} = \sum_{i=0}^{k-1} (B + xH)^i H (B + (x+h)H)^{k-i-1}.$$

Le second membre il a une limite fini quand h tend vers 0, donc g_k est dérivable en x et

$$g'_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} (B + xH)^i H (B + xH)^{k-i-1}.$$

b) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \|g'_k(x)\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|(B + xH)^i H (B + xH)^{k-i-1}\| \\ &\leq \|H\| \sum_{i=0}^{k-1} (\|B\| + x\|H\|)^i (\|B\| + x\|H\|)^{k-i-1} \\ &= k\|H\|(\|B\| + x\|H\|)^{k-1} \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements fini, appliqué à g_k sur $[0, 1]$, entraîne $\|g_k(1) - g_k(0)\| \leq \sup\limits_{x \in [0,1]} \|g'_k(x)\|$, inégalité qui s'écrit encore

$$\|(B + H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$

8. a) On a $T(A, x) = \dfrac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{A^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!}$ qui est la somme d'une série normalement convergente sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ ($a > 0$), et comme les termes de cette série sont bien définis en 0, alors l'application $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge par continuité en 0, en posant $T(A, 0) = \dfrac{A^2}{2}$.
La formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral, appliquée à la fonction f_A s'écrit :

$$\exp(xA) = I_n + xA + \frac{x^2 A^2}{2} \int_0^1 (1 - t) \exp(txA) \mathrm{d}t.$$

D'où $T(A, x) = \dfrac{A^2}{2} \displaystyle\int_0^1 (1 - t) \exp(txA) \mathrm{d}t$ et donc $\|T(A, x)\| \leq \dfrac{1}{2} \|A\|^2 \exp(x\|A\|)$.

b) On a

$$\exp\left(\frac{1}{k} A\right) - \frac{1}{k^2} T\left(A, \frac{1}{k}\right) = I_n + \frac{1}{k} A$$

et

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right)\right)^k = \exp A$$

D'où

$$\left(I_n + \frac{1}{k} A\right)^k - \exp A = \left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right) - \frac{1}{k^2} T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right)^k - \left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right)\right)^k.$$

La formule de la question 7.(b) donne, avec $B=\exp\left(\frac{1}{k}A\right)$ et $H=-\frac{1}{k^2}T\left(A,\frac{1}{k}\right)$:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k-\exp A\right\| &\leq \frac{1}{k}\left\|T\left(A,\frac{1}{k}\right)\right\|\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)+\frac{1}{k^2}\left\|T\left(A,\frac{1}{k}\right)\right\|\right]^{k-1}\\
&\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\right]^{k-1}\\
&\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\exp\left(\frac{k-1}{k}\|A\|\right)\left[1+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}\\
&\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp(\|A\|)\left[1+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}
\end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $\lim\limits_{k\to\infty}\left[1+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}=1$, d'où $\lim\limits_{k\to\infty}\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k=\exp(A)$.

Remarque : On a

$$\exp(A)-\left(I_n+\frac{1}{k}\right)^k=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i-\sum_{i=0}^{k}\frac{\mathrm{C}_k^i}{k^i}A^i$$

Or $\forall k\in[\![1,n]\!]$,

$$\frac{\mathrm{C}_k^i}{k^i}=\frac{k}{k}\frac{k-1}{k}\dots\frac{k-i+1}{k}\frac{1}{i!}\leq\frac{1}{i!},$$

donc

$$\left\|\exp(A)-\left(I_n-\frac{A}{k}\right)^k\right\|\leq\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{i!}-\frac{\mathrm{C}_k^i}{k^i}\right)\|A\|+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\|A\|^i}{i!}=\exp(\|A\|)-\left(1+\frac{\|A\|}{k}\right)^k.$$

Le second terme tend vers quand k tend vers l'infini. Donc $\lim\limits_{k\to\infty}\left(I_n+\frac{A}{k}\right)^k=\exp(A)$.

c) Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $C_1,C_2,\dots,C_n$ les colonnes de A. Alors $\det=\det_{\mathscr{B}}\circ l$ où $l(A)=(C_1,C_2,\dots,C_n)$, donc $\det$ est continue, comme composée d'applications continues (l linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ n-linéaire en dimension finie).
On sait que le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$\chi_A(X)=\det(A-XI_n)=(-1)^nX^n+(-1)^{n-1}X^{n-1}+\dots+\operatorname{tr}(A),$$

donc si $x\neq0$, $\det(I_n+xA)=x^n\chi_A\left(\frac{-1}{x}\right)=1+\operatorname{tr}(A)x+o(x)$, en particulier :

$$\det\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)=1+\frac{\operatorname{tr}(A)}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Par continuité de $\det$, on a donc :

$$\det\exp(A)=\lim_{k\to\infty}\det\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\operatorname{tr}(A)}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k=\exp(\operatorname{tr}(A)).$$

• • • • • • • • •