Devoir libre n°6
Correction

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{\alpha,t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 - Si $t < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\alpha,t}(x) = +\infty$, et donc $f_{\alpha,t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
 - Si $t > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\alpha,t} = 0$, donc $f_{\alpha,t}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc $f_{\alpha,t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
 - Si $t = 0$, $f_{\alpha,0}(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^2} \simeq \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ au voisinage de $+\infty$, donc $f_{\alpha,0}$ est intégrable si, et seulement si, $\alpha \in [0, 1[$.
 En conclusion, $f_{\alpha,t}$ est intégrable si, et seulement si, $(\alpha, t) \in C = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \cup [0, 1[\times \{0\}$

- Soit $a > 0$. La fonction $(t, x) \mapsto f_{0,t}(x) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$ est continue sur $[a, +\infty[\times [0, +\infty[$ et admet des dérivées partielles par rapport à t , $(t, x) \mapsto \frac{(-x)^k e^{-tx}}{1+x^2}$, continues sur $[a, +\infty[\times [0, +\infty[$.

Soit $\varphi_k : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\varphi_k(t) = \frac{x^k e^{-xa}}{1+x^2}.$$

Alors φ est continue, intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\forall (t, x) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[, \left| \frac{(-x)^k e^{-tx}}{1+x^2} \right| \leq \frac{x^k e^{-xa}}{1+x^2} = \varphi_k(x).$$

D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, Φ_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$ et $\Phi_0^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{(-x)^k e^{-tx}}{1+x^2} dx$. Comme a est quelconque, le résultat reste vrai sur la réunion des intervalles $[a, +\infty[$, donc Φ_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0, +\infty[$.

Il est clair que $\Phi_0(t) + \Phi_0''(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$. D'autre part, on a $0 \leq f_{0,t}(x) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2} \leq e^{-tx}$, donc $0 \leq \Phi_0(t) \leq \frac{1}{t}$. Ainsi $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_0(t) = 0$.

- $\phi - \Phi_0$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$, donc $\phi - \Phi$ est 2π -périodique et tend vers 0 à l'infini, donc $\phi - \Phi$ est nulle et donc $\phi = \Phi_0$.
- Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_u^X \frac{\sin(x-v)}{x} dx &= \left[\frac{-\cos(x-v)}{x} \right]_u^X - \int_u^X \frac{\cos(x-v)}{x^2} dx \\ &= \frac{\cos(u-v)}{u} - \frac{\cos(X-v)}{X} - \int_u^X \frac{\cos(x-v)}{x^2} dx \end{aligned}$$

On a $\left| \frac{\cos(x-v)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, donc l'intégrale $\int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2} dx$ existe, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(X-v)}{X} = 0$, alors l'intégrale impropre $\int_u^{+\infty} \frac{\sin(x-v)}{x} dx$ existe et vaut $\frac{\cos(u-v)}{u} - \int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2} dx$.

- Soient $s > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $s+h > 0$, on a :

$$\begin{aligned} R(s+h) - R(s) &= \int_{s+h}^{+\infty} \rho(y) dy - \int_s^{+\infty} \rho(y) dy \\ &= \int_{s+h}^{+\infty} \rho(y) dy + \int_{s+h}^s \rho(y) dy - \int_{s+h}^{+\infty} \rho(y) dy \\ &= \int_{s+h}^s \rho(y) dy = F(s) - F(s+h) \text{ où } F \text{ est une primitive de } \rho \end{aligned}$$

D'où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(s+h) - R(s)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = -\rho(s)$, donc R est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$ car ρ est continue) sur $]0, +\infty[$ et $R' = -\rho$.

D'après la définition de f on a :

$$f(t) = \frac{1}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-t)}{x^2} dx \stackrel{u=x-t}{=} \frac{1}{t} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{(u+t)^2} du.$$

Et on a aussi

$$f(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx = \cos t \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \sin t \int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx.$$

Les fonctions $t \mapsto \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ et $t \mapsto \int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ sont des primitives de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, donc sont elles-mêmes de classe $\mathcal{C}^\infty$, de même que les fonctions $\cos$ et $\sin$. On en déduit que f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t > 0$, on a :

$$f'(t) = -\sin t \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \cos t \int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx.$$

et

$$f''(t) = -\cos t \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{\sin^2 t}{t} + \sin t \int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + \frac{\cos^2 t}{t} = -f(t) + \frac{1}{t}.$$

On a, pour $t > 0$, $\left| \frac{\cos x}{(t+x)^2} \right| \leq \frac{1}{(t+x)^2}$, donc on peut déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(t+x)^2} dx = 0$, en conséquence $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

6. Soit $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ définie sur $[0, +\infty[$ (se prolonge par continuité en 0). À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x g(t) dt = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$.

D'autre part, $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \int_{[1, +\infty[} \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Montrons que la fonction g n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$; on a

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt &\geq \int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1 - \cos(2t)}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt \end{aligned}$$

Mais l'intégrale $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$ admet pour limite $+\infty$, alors que l'intégrale $\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge (intégration par parties). On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt = +\infty$.

Soit $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x+t} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \sin x \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} \right) dx \right| \\ &= t \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \\ &\leq t \left(\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| + \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \right) \\ &\leq t \left(\int_0^1 \frac{dx}{x+t} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right) = t \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right) \end{aligned}$$

Le terme à droite tend vers 0 quand t tend vers 0, d'où, en tenant compte de la question 3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_0(t) = \Phi_0(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

7. D'abord par une intégration parties, on a les relations :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx,$$

et

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Par linéarisation $\sin^4 x = \frac{1}{8} \frac{\cos(4x) - 1}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} dx - \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(4x)}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\sin^4 x}{3x^3} \right]_0^{+\infty} + \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x \cos x}{x^3} dx \\ &= \frac{4}{3} \left(\left[-\frac{\sin^3 x \cos x}{2x^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{3 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - \sin^4 x}{x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx - \frac{8}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx \\ &= 2 \frac{\pi}{2} - \frac{8}{3} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

8. Par des intégration par parties et des changements de variables, on a : On a

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \sin(tx) \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(tx)}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} dx - \int_0^{+\infty} \frac{u \sin u}{u^2+t^2} du \\
 &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} (\cos u)' \frac{u}{u^2+t^2} du \\
 &= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{u \cos u}{u^2+t^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos u \left(\frac{u}{u^2+t^2} \right)' du \\
 &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2-u^2}{(u^2+t^2)^2} \cos u du
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\left| \int_0^{+\infty} \frac{t^2-u^2}{(u^2+t^2)^2} \cos u du \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+t^2} = \frac{\pi}{2t}$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \frac{\pi}{2}$.

Le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, montre que l'application

$$t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^2-u^2}{(u^2+t^2)^2} \cos u du$$

est continue sur $\mathbb{R}$, elle est de même de la fonction G , et comme $G(t)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $|t|$ tend vers $+\infty$, alors G est bornée sur $\mathbb{R}$.

Enfin, pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$, on a :

$$|G(t) - G(t')| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx) - \sin(t'x)}{x(1+x^2)} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{x|t-t'|}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}|t-t'|.$$

● ● ● ● ● ● ● ●