Devoir libre $n°7$
Correction

(I)

1. On a $4+x^2-2\cos\theta=(x-2\cos\theta)^2+(2\sin^2\theta)\geq 0$ et $4+x^2-2\cos\theta=0$ si, et seulement si, $x-2\cos\theta=0$ et $\sin\theta=0$ ou encore si, et seulement si, $x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$ et $x=2(-1)^k$. Ainsi si $\theta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$, $E=\mathbb{R}$, sinon $E=\mathbb{R}\backslash\{2(-1)^k\}$ si $\theta=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
2. a) Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, comme composée d'applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E.
   b) Pour tout $x\in E$, $f'(x)=\dfrac{2x-4\cos\theta}{4+x^2-2\cos\theta}$ et $f''(x)=\dfrac{-2x^2+8x\cos\theta-8\cos(2\theta)}{4+x^2-2\cos\theta}$.
   c) Montrons la propriété par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. Le résultat est trivial pour $n=1$ et $n=2$ avec $P_1(X)=2X-4\cos\theta$ et $P_2(X)=-2X^2+8X\cos\theta-8\cos(2\theta)$. Supposons que
   $$\forall x\in E,\quad f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(4+x^2-4x\cos\theta)^n},$$
   où P_n est un polynôme de degré n.
   On a $\forall x\in E$,
   $$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(4+x^2-4x\cos\theta)^n-nP_n(x)(4+x^2-4x\cos\theta)^{n-1}(2x-4\cos\theta)}{(4+x^2-4x\cos\theta)^{2n}}\\ &= \frac{(4+x^2-4x\cos\theta)P_n'(x)-nP_n(x)(2x-4\cos\theta)}{(4+x^2-4x\cos\theta)^{n+1}}\\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{(4+x^2-4x\cos\theta)^n}\end{aligned}$$
   où $P_{n+1}(X)=(4+X^2-4X\cos\theta)P_n'(X)-nP_n(X)(2X-4\cos\theta)$. Notons a_n le coefficient dominant de P_n, alors la formule de P_{n+1} montre que son coefficient dominant est $-na_n$ et donc $\deg P_{n+1}=n+1$
3. a) On remarque que $g(x)=2x-4\cos\theta$ et donc sa dérivée d'ordre $n+1$ est nulle pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   b) Par la formule de Leibniz, on a :
   $$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1}\complement_{n+1}^k h(x)^{(k)}f^{(n+1-k)}(x)\\ &= h(x)\frac{P_{n+2}(x)}{h(x)^{n+2}}+(n+1)\frac{P_{n+1}(x)}{h(x)^{n+1}}+(n+1)n\frac{P_n(x)}{h(x)^n}r=0\end{aligned}$$
   où $h(x)=4+x^2-4\cos\theta$.
   Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$,
   $$P_{n+2}(x)+(2x-4\cos\theta)(n+1)P_{n+1}(x)+(4+x^2-4\cos\theta)(n+1)nP_n(x)=0.$$
   Ou encore,
   $$\frac{P_{n+2}(x)}{(n+1)!}+(2x-4\cos\theta)\frac{P_{n+1}(x)}{n!}+(4+x^2-4\cos\theta)\frac{P_n(x)}{(n-1)!}=0.$$
   Ou encore,

4. a) L'équation caractéristique associé à la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 s'écrit

$$r^2 + (2x - 4\cos\theta)r + (4 + x^2 - 4\cos\theta) = 0,$$

dont les racines sont $r_1 = x - 2e^{i\theta}$ et $r_2 = x - 2e^{-i\theta}$. Donc la solution générale est de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; u_n(\theta) = \lambda(x - 2e^{i\theta})^n + \mu(x - 2e^{-i\theta})^n,$$

où on a posé $u_n = u_n(\theta)$.

b) Avec ses conditions on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda(x - 2e^{i\theta}) + \mu(x - 2e^{-i\theta}) = 2x - 4\cos\theta, \\ \lambda(x - 2e^{i\theta})^2 + \mu(x - 2e^{-i\theta})^2 = -2x^2 + 8x\cos\theta - 8\cos(2\theta). \end{cases}$$

Comme $u_1(\theta) = u_1(-\theta)$, alors la première équation donne $\mu = \lambda = -1$. Donc

$$u_n = -(x - 2e^{i\theta})^n - (x - 2e^{-i\theta})^n = -\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k x^{n-k} 2^{k+1} \cos(k\theta)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

5. a) $\dfrac{P_n(x)}{(n-1)!}$ vérifie la même relation de récurrence de la question $3.a)$ (d'après 2.b) avec les mêmes conditions initiales, donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(x) = -(n-1)!u_n = -(n-1)!\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k x^{n-k} 2^{k+1} \cos(k\theta).$$

b) On a $P_n(0) = -(n-1)!2^{n+1}\cos(n\theta)$ et $f^{(n)}(0) = \dfrac{P_n(0)}{4^n} = -\dfrac{(n-1)!\cos(n\theta)}{2^{n-1}}$.

(II)

1. a) Il est évident que pour $|x| < 2$, $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{2e^{i\theta}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x}{2e^{i\theta}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\theta} x^n$.

b) De même , pour $|x| < 2$, $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{2e^{-i\theta}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x}{2e^{-i\theta}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\theta} x^n$.

2. a) On vérifie facilement que $f'(x) = \dfrac{2x - 4\cos\theta}{4 + x^2\theta - 4x\cos\theta} = -\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, donc pour $x \in]-2, 2[$, on peut écrire

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\theta} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\theta} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cos(n\theta) x^{n-1}.$$

Puis par intégration, on obtient pour tout $x \in]-2, 2[$,

$$f(x) = f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cos(n\theta)\frac{x^n}{n} = 2\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n2^{n-1}} x^n$$

b) On a $f(0) = 2\ln 2$ et on retrouve, une autre fois, $f^{(n)}(0) = -n!\dfrac{\cos(n\theta)}{n2^{n-1}} = -(n-1)!\dfrac{\cos(n\theta)}{2^{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

• • • • • • • • •