

Devoir libre n°08

Correction

Exercice

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, le point $x = 0$ est exclu de son domaine de d'application.

Cherchons une solution de $(\mathcal{L}_1)$ développable en série entière. Supposons que $(\mathcal{L}_1)$ admet une solution de la forme $y : x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R, R > 0$), donc on aura :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) - 2pn + p(p+1)] a_n x^n = - \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1) a_n x^{n+2}.$$

On voit d'abord que $a_0 = y(0) = 0$, puis $p(p-1)a_1 = 0$ d'où $a_1 = 0$ si $p \geq 2$. Maintenant pour $n \geq 2$,

$$(n-p)(n-p-1)a_n = -p(p+1)a_{n-2}$$

Par suite, puisque $a_0 = 0, a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$. On peut donc prendre a_p et a_{p+1} quelconques et calculer les coefficients a_n pour $n \geq p+2$.

• Si $n = p + 2k$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{p+2k} = \frac{(-1)^k (p(p+1))^k}{(2k)!} a_p.$$

• Si $n = p + 2k + 1$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{p+2k+1} = \frac{(-1)^k (p(p+1))^k}{(2k+1)!} a_{p+1}.$$

Par conséquent $y = a_p y_1 + a_{p+1} y_2$ avec

$$y_1(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(p(p+1))^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad y_2(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(p(p+1))^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Le rayon de convergence $R = +\infty$. Posons $x = \sqrt{p(p+1)}$, donc $y_1(x) = x^p \cos(wx)$ et $y_2 = \frac{x^p}{w} \sin(wx)$. On peut vérifier que le Wronskien $W(y_1, y_2)$ est non nul, par exemple au point $x_0 = \frac{2\pi}{w}$, on a :

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0^p & 0 \\ px_0^p & x_0^p \end{vmatrix} \neq 0$$

La solution générale de $(\mathcal{L}_1)$ sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto y(x) = x^p(\alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problème

PREMIÈRE PARTIE

1. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f'_\lambda(x) = -x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^{\lambda-1}$, donc $\forall x \in]0, 1[, f'_\lambda(x) < 0$, ainsi f_λ est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

D'autre part, $\forall x \in]0, 1[, f''_\lambda(x) = \frac{\lambda-1}{\lambda} x^{\frac{1-2\lambda}{\lambda}}(1-x^\lambda)^{\lambda-2}$, d'où :

- si $0 < \lambda < 1$, f''_λ est négative sur $]0, 1[$, et donc f_λ est strictement concave,
- si $\lambda = 1$, $f_1(x) = 1 - x$, f_λ est donc affine,

- si $\lambda > 1$, f''_λ est positive sur $]0, 1[$, et donc f_λ est strictement convexe.
2. Pour montrer que la droite $y = x$ est un axe de symétrie, il suffit de vérifier que si $(x, y) \in \Gamma_\lambda$, alors $(y, x) \in \Gamma_\lambda$. On a :

$$\begin{aligned} f_\lambda(y) &= f_\lambda(1 - x^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda \\ &= \left[1 - (1 - x^{\frac{1}{\lambda}})^{\lambda \frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda \\ &= x \end{aligned}$$

Donc la droite $y = x$ est bien axe de symétrie commun à tous les courbes Γ_λ . L'abscisse S_λ est déterminée par l'équation $(1 - x^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda = x$, donc $x = \frac{1}{2^\lambda}$, d'où $S_\lambda = \left(\frac{1}{2^\lambda}, \frac{1}{2^\lambda}\right)$.

3. D'après la question 1., on a :
- si $0 < \lambda < 1$, f_λ est strictement concave sur $]0, 1[$, donc Γ_λ tourne la concavité vers les $y < 0$,
 - si $\lambda = 1$, $\Gamma_1(x)$ est un segment de droite, donc Γ_λ n'a pas de concavité,
 - si $\lambda > 1$, f_λ est strictement convexe sur $]0, 1[$, donc Γ_λ tourne la concavité vers les $y < 0$.
4. Soit $\lambda = \frac{1}{n} < 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), donc $f_{\frac{1}{n}}$ est strictement concave, donc on a

$$f_{\frac{1}{n}}\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}f_{\frac{1}{n}}(a) + \frac{1}{2}f_{\frac{1}{n}}(b)$$

ou encore

$$\frac{1}{2}(1 - a^n)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(1 - b^n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 - \frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

d'où

$$\frac{1}{2^n}[(1 - a^n)^{\frac{1}{n}} + (1 - b^n)^{\frac{1}{n}}]^n \leq 1 - \frac{(a+b)^n}{2^n}$$

finalement,

$$(a+b)^n + [(1 - a^n)^{\frac{1}{n}} + (1 - b^n)^{\frac{1}{n}}]^n \leq 2^n.$$

Si $\lambda = n$, alors f_n est strictement convexe. Le même raisonnement montre que

$$\sqrt[n]{a+b} + \sqrt{(1 - \sqrt[n]{a})^n + (1 - \sqrt[n]{b})^n} \geq \sqrt[n]{2}.$$

DEUXIÈME PARTIE

1. Posons $g_\lambda(t) = t^{\lambda-1}(1-t)^\lambda$. g_λ est continue sur $]0, 1]$ et $\forall x \in]0, 1]$, $|g_\lambda| \leq t^{\lambda-1} = \frac{1}{t^{1-\lambda}}$ et comme $1 - \lambda < 1$, g_λ est absolument intégrable sur $]0, 1]$, par suite $F(\lambda)$ est bien définie pour $\lambda > 0$.
2. L'aire du domaine est donnée par $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^1 f_\lambda(x)dx$, avec le changement de variable $x = t^\lambda$, on obtient $\mathcal{A}(\lambda) = F(\lambda)$.
3. (a) L'aire du triangle OAS_λ est $\frac{\left(\frac{1}{2^\lambda}\right) \times 1}{2} = \frac{1}{2^{\lambda+1}}$.
- si $0 < \lambda < 1$, f_λ est concave sur $]0, 1[$, donc $\frac{1}{2^{\lambda+1}} \leq \frac{F_\lambda}{2}$.
 - si $\lambda = 1$, $\frac{1}{2^{\lambda+1}} = \frac{F_\lambda}{2}$.
 - si $\lambda > 1$, f_λ est convexe sur $]0, 1[$, donc $\frac{1}{2^{\lambda+1}} \geq \frac{F_\lambda}{2}$.

- (b) Si $\lambda \in]0, 1[$, on a $\frac{1}{2\lambda} \leq F(\lambda)$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda} = 1$, donc $F(\lambda)$ est inférieure à l'aire du carré de cotés $[OA]$ et $[OB]$, donc $\frac{1}{2\lambda} \leq F(\lambda) \leq 1$ et par conséquent $\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda) = 1$.

Si $\lambda > 1$, on a $0 \leq F(\lambda) \leq \frac{1}{2\lambda}$, donc $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq F(n) \leq \frac{1}{2^n}$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} F(n)$ converge et sa somme vérifie l'inégalité

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le formule d'intégration par parties généralisée

$$\int_0^b f(x) g^{(n)}(x) dx = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x) g(x) dx,$$

on a

$$\begin{aligned} F(n) &= n \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{n-1} dt \\ &= n \left[-\frac{1}{n+1} (1-t)^{n+1} t^{n-1} + \dots - \frac{(n-1)!(1-t)^{2n}}{(2n)(2n-1)\dots(n+1)} \right]_0^1 \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (1) \end{aligned}$$

- La formule de binôme donne :

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbb{C}_n^k t^k.$$

Donc

$$\begin{aligned} F(n) &= n \int_0^1 t^{n-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbb{C}_n^k t^k dt \\ &= n \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbb{C}_n^k \int_0^1 t^{n+k-1} dt \\ &= n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\mathbb{C}_n^k}{n+k} \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) nous déduisons que

$$n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\mathbb{C}_n^k}{n+k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

5. (a) La fonction $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de (E) si, et seulement si,

$$-2a_0 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} [(4n-2)a_n - na_{n-1}] x^n = 0,$$

donc $-2a_0 = 0$, $2a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $(4n - 2)a_n = na_{n-1}$, d'où $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \geq 2$,

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = F(n).$$

Nous pouvons remarquer que cette relation reste vraie pour $n = 1$. Le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ peut être obtenu par la règle de D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4},$$

donc $R = 4$.

D'après ce qui précède, la somme de la série entière de terme général $a_n x^n$ est solution de (E) pour $x \in]-4, 4[$. De $a_0 = 0$ et $a_n = F(n)$ ($n \geq 1$) nous déduisons que $y(1) = \sigma$.

(b) i. Pour $x \in]0, 4[$, on pose $u = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$, donc $dx = \frac{8udu}{(1+u^2)^2}$, d'où :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{4-x}{x}} dx &= -8 \int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} \\ &= \frac{4u}{1+u^2} - 4 \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{4u}{1+u^2} 4 \arctan u + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int \sqrt{\frac{4-x}{x}} dx = x \sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4 \arctan \left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} \right) + c.$$

ii. La solution générale y_0 de l'équation homogène associée à (E) est donnée par

$$y_0(x) = k \exp \left(\int \frac{x+2}{x(4-x)} dx \right), \quad x \in]0, 4[, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Or $\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(4-x)}$, donc $\int \frac{x+2}{x(4-x)} dx = \frac{1}{2} \ln x - \frac{3}{2} \ln(4-x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ Donc

$$y_0(x) = k \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \quad (0 < x < 4) \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

iii. D'après ce qui précède la solution générale de (E) est donc

$$x \mapsto \left(x \sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4 \arctan \left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} \right) + c \right) \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}},$$

soit

$$x \mapsto \frac{x}{4-x} - \frac{4}{4-x} \sqrt{\frac{x}{4-x}} (\arctan \sqrt{\frac{4-x}{x}} - c'), \quad c' = \frac{c}{4}.$$

La constante c' étant fixé, nous avons, pour $0 < x < 4$

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{1}{4-x} - \frac{4}{4-x} \sqrt{\frac{1}{4-x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\arctan \sqrt{\frac{4-x}{x}} - c' \right), \quad c' = \frac{c}{4}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \sqrt{\frac{4-x}{x}} = \frac{\pi}{2}$, donc si $c' \neq \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{y(x)}{x} \right| = +\infty$. Si nous voulons une limite finie, nous devons nécessairement avoir $c' = \frac{\pi}{2}$, supposons donc $c' = \frac{\pi}{2}$, de la relation

$\arctan(t) + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$ ($t > 0$) et $\arctan t \sim t$ au voisinage de 0, nous déduisons

$$\arctan \sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2}x = -\arctan \sqrt{\frac{x}{4-x}} \sim -\sqrt{\frac{x}{2}}$$

au voisinage de 0. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{2}$, et donc la solution correspondant à $c' = \frac{\pi}{2}$ est donc l'unique solution répondant au problème.

La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n$ est aussi solution de (E) sur $]0, 4[$ et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x)}{x} = a_1 = \frac{1}{2}.$$

D'après l'unicité d'une telle solution, on a

$$\forall x \in]0, 4[, \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = \frac{x}{4-x} - \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)\sqrt{4-x}} \left(\arctan \sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Or $\arctan \sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2} = -\arctan \sqrt{\frac{x}{4-x}}$ et on peut remarquer que la fonction

$$x \mapsto \arcsin \sqrt{\frac{x}{4}} + \arctan \sqrt{\frac{x}{4-x}}$$

est constante sur $[0, 4[$ (la dérivée est nulle), comme elle s'annule en $x = 0$, elle est identiquement nulle, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = \frac{1}{4-x} \left(x + 4\sqrt{\frac{x}{4-x}} \arcsin \sqrt{\frac{x}{4}} \right)$$

(c) Nous avons $\sigma = y(1)$, donc $\sigma = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right)$.

• • • • •