

Devoir libre n°10
à rendre le 12/03/2015

Une famille part en vacances en voiture, mais le père n'est pas certain d'avoir une quantité d'essence suffisante pour parcourir les 550 km qui les séparent de leur destination.

Le père estime à p , p appartenant à $]0, 1[$, la probabilité de trouver une station service sur son trajet. De plus, si station service il y a, elle est unique et sa position est uniformément répartie sur le trajet.

Après avoir parcouru x kilomètres, x appartenant à $[0, 550]$, sans rencontrer de station service, le père s'interroge sur ses chances de trouver une station service plus loin.

1. MISE EN PLACE DES ÉVÉNEMENTS ET DES LOIS

(a) Soit S l'événement : " Une station service est sur le trajet " .

Préciser $p(S)$ et $p(\bar{S})$.

(b) LOI UNIFORME SUR $[0, 550]$.

Sachant qu'il y a une station service sur le trajet, quelle est la probabilité que la station service :

- se trouve entre le kilomètre 100 et le kilomètre 300 ?
- se trouve exactement au kilomètre 100 ?
- se trouve au-delà du kilomètre 300 ?

(c) Soient A l'événement :

" la station service se trouve sur le trajet et avant le kilomètre x "

et B l'événement :

" la station service se trouve sur le trajet et après le kilomètre x " .

Décrire l'événement contraire de A par une phrase.

Exprimer à l'aide des événements A , B ou leur événement contraire, la probabilité $g(x)$ que le père cherche à calculer, c'est-à-dire la probabilité que la station service se situe après le kilomètre x sachant qu'elle ne se situait pas avant le kilomètre x .

(d) Comparer les événements B et A , et en déduire que $B \cap \bar{A} = B$.

(e) Déduire des questions précédentes que $g(x) = \frac{p(B)}{1 - p(A)}$.

2. CALCUL DES PROBABILITÉS

(a) Calculer les probabilités conditionnelles $p_S(B)$ et $p_{\bar{S}}(B)$. En appliquant une formule à préciser, en déduire $p(B)$.

(b) Par une démarche identique, calculer $p(A)$.

(c) En déduire que :

$$g(x) = p \frac{550 - x}{550 - px}.$$

(d) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[0, 550]$. Justifier que l'équation $g(x) = \frac{p}{2}$ d'inconnue x dans $[0, 550]$ admet une unique solution, puis calculer cette solution.

Fin de l'épreuve