Devoir libre $n°3$
correction

Partie I

1. Puisque f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, alors g de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

2. La fonction $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est continue dans U. La continuité en (a,b) se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \alpha > 0 \;\text{ tel que }\; \forall (x,y) \in U, \;\; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \alpha) \Rightarrow \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \right| < \varepsilon$$

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on voit que si δ est la plus courte distance de (a,b) au contour de U, on pourra choisir r tel que $2r = \inf(\alpha, \delta)$ pour que, si B est la boule de centre (a,b) et de rayon $2r$:

$$\forall (x,y) \in B, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

3. Puisque g est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut écrire $g(x,y') - g(x,y) = (y'-y)\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y_1)$ avec y_1 compris entre y et y'. A l'intérieur de la boule B, $\left| \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| \leq \dfrac{1}{2}$ et on a

$$|g(x,y') - g(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y - y'|$$

4. Pour $y \in [b-r, b+r]$, on voit que tout point d'abscisse comprise entre $a - r\sqrt{3}$ et $a + r\sqrt{3}$ est inclus dans B. La fonction g étant continue en (a,b), on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \alpha(\varepsilon) > 0 \;\text{ tel que }\; a - \alpha < x < a + \alpha \Longrightarrow |g(x,b) - g(a,b)| < \varepsilon.$$

Si on $\varepsilon = \frac{r}{2}$, on voit qu'en choisissant $\alpha = \inf(r\sqrt{3}, \alpha(\frac{r}{2}))$ avec $I =]a-\alpha, a+\alpha[$

$$\forall x \in I, \;\; |g(x,b) - g(a,b)| \leq \frac{r}{2}.$$

5. On a $g(a,b) = b$, donc on peut écrire

$$g(x,y) - b = g(x,y) - g(a,b) = g(x,y) - g(x,b) + g(x,b) - g(a,b)$$

soit

$$|g(x,y) - b| \leq |g(x,y) - g(x,b)| + |g(x,b) - g(a,b)|.$$

Or, d'après 3., pour $y \in [b-r, b+r]$, $|g(x,y) - g(x,b)| \leq \dfrac{1}{2}|y - b| \leq \dfrac{r}{2}$ et d'après 4., pour $x \in I$, $|g(x,b) - g(a,b)| \leq \dfrac{r}{2}$, ce qui donne finalement $|g(x,y) - b| \leq r$ et montre que

$$\forall (x,y) \in I \times [b-r, b+r], \;\; g(x,y) \in [b-r, b+r]$$

6. La relation $|g(x,y')-g(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y'-y|$ sur $[b-r,b+r]$ montre que sur cet intervalle, la fonction $y \longmapsto g(x,y)$ est contractante $\forall x \in I$.

7. D'après le théorème du point fixe, pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b-r,b+r]$ tel que $g(x,y)=y$ soit

$$y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} f(x,y) = y,$$

soit encore $f(x,y)=0$. On posera $y=\varphi(x)$.

8. La relation $f(x,\varphi(x))=0$ donne, en supposant φ de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

d'où :

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

Partie II

1. Soit (a,b) tel que $f(a,b)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

(a) Les conditions de la partie I étant satisfaites, on peut en appliquer les conclusions, à savoir qu'il existe un ouvert V contenant (a,b), un intervalle I contenant a et une application φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I tels que

$$((x,y)2V, \ \ f(x,y)=0) \Longleftrightarrow (x \in I, y = \varphi(x)).$$

(b) Au voisinage de (a,b) on a $F(x,y)=F(x,\varphi(x))$ d'où, en posant $h(x)=F(x,\varphi(x))$

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \ \ h'(x) &= \frac{d}{dx}F(x,\varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(x) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}. \end{aligned}$$

Si (a,b) est un extremum de F lié par $f(x,y)=0$, alors h admet un extremum local en a on aura donc $h'(a)=0$, soit, comme $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

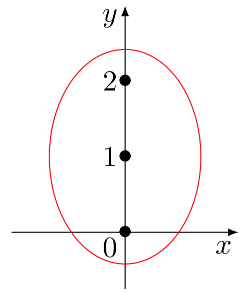
$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$$

(c) La réciproque n'est pas vraie, car la relation précédente est encore vérifiée s'il s'agit d'un maximum par rapport à la variable x et d'un minimum par rapport à la variable y (ou l'inverse). Un tel point est appelé point selle.

2. Les variables x et y jouent des rôles symétriques et peuvent être permutées. L'implication du 1b est également symétrique en x et y. Si $f(a,b)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$, elle est encore vraie.

Partie III

1. La courbe C d'équation $2x^2+y^2-2y-1=0$ est une ellipse centrée en $(0,1)$ de demi grand axe $\sqrt{2}$ porté par Oy et de demi petit axe 1. Donc D est le domaine intérieur à C, contour compris et $\widetilde{D}$ est le domaine intérieur à C, contour exclu.



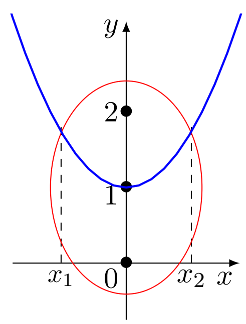
2. Il est clair que D est inclus dans la boule de centre $(0,1)$ et de rayon $1+\sqrt{2}$. L'ensemble D est donc borné.
3. Soit $F(x,y)=x^2e^y$. F est une fonction continue, définie sur un ensemble fermé et borné. Elle admet donc, sur cet ensemble, un minimum et un maximum global. Ce minimum et ce maximum sont effectivement atteints. Il est clair que la fonction étant positive, le minimum global vaut 0.
4. Si F admet un extremum local sur l'ouvert $\widetilde{D}$, alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2xe^y=0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x^2e^y=0$, donc les points critiques sont $(0,y)$ où $y\in]1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}[$.
   Ainsi F un minimum local qui vaut 0 ($F\geq 0$) et atteint en tout point de la forme $(0,y)$, $y\in\,]1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}[$.
5. Le minimum global de F sur D est également l'axe Oy. Pour les raisons évoquées dans la question précédente, les maxima globaux sont atteints sur C. Il s'agit donc de maximiser $F(x,y)=x^2e^y$ sous la contrainte $f(x,y)=2x^2+y^2-2y-1=0$ avec

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2xe^y,\ \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x^2e^y,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-2.$$

   L'égalité du II 1.(b) donne

$$2xe^y(2y-2)-x^2e^y4x=0$$

   soit $x(y-x^2-1)=0$, d'où $x=0$ (déjà cité) et $y=x^2+1$. Les extrema globaux sont les points d'intersection de C et de la parabole $y=x^2+1$



   On vérifie que les abscisses de ces points sont racines de l'équation $x^4+2x^2-2=0$ ce qui donne facilement les deux points $x_1=\sqrt{\sqrt{3}-1}$ et $x_2=\sqrt{\sqrt{3}-1}$. D'où $y=\sqrt{3}$ et $\max\limits_{(x,y)\in D}F(x,y)=(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}}$.

Partie VI

Soit un triangle rectangle de périmètre l fixé, a son hypoténuse, x et y ses côtés. Il vient $a=l-x-y$ et $(l-x-y)^2=x^2+y^2$ soit $f(x,y)=l^2-2(x+y)l+2xy=0$, et la fonction à maximiser est $S=F(x,y)=\frac{1}{2}xy$.

On en tire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2l + 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2l + 2x$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{2}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{2}$. L'égalité précédente donne

$$\frac{y}{2}(2x-2l) - \frac{x}{2}(2y-2l) = 0$$

soit $x = y$.
La surface passe donc par un extremum lorsque le triangle est isocèle. On a d'ailleurs $l = x(2+\sqrt{2})$ soit $x = \dfrac{l}{2+\sqrt{2}}$ avec

$$S = \frac{x^2}{2} = \frac{l^2}{2(2+\sqrt{2})^2}.$$

•••••••••••