Devoir libre $n°5$
correction

On rappelle que E_k est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les polynômes $(X^nY^{k-n})_{k\in[\![0,n]\!]}$; c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $k+1$.

1. Soit $P,Q\in E_k$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}[P+\lambda Q|A] &= (P+\lambda Q)(aX+bY,cX+dY)\\ &= P(aX+bY,cX+dY)+\lambda Q(aX+bY,cX+dY)\\ &= [P|A]+\lambda[Q|A].\end{aligned}$$

Donc l'application est bien linéaire.

D'autre part, $\forall P\in E_k$, $[P|A]\in E_k$, en effet, soit $P=\displaystyle\sum_{n=0}^{n}a_nX^nY^{k-n}\in E_k$, donc

$$\begin{aligned}[P|A] &= \sum_{n=0}^{n}a_n(aX+bY)^n(cX+dY)^{k-n}\\ &= \sum_{n=0}^{n}a_n\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i(aX)^i(bY)^{n-i}\sum_{j=0}^{k-n}\mathrm{C}_{k-n}^j(cX)^j(bY)^{k-n-j}\\ &= \sum_{n=0}^{n}a_n\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k-n}\mathrm{C}_n^i\mathrm{C}_{k-n}^j a^ib^{n-i}c^jb^{k-n-j}\right)X^{i+j}Y^{k-i-j}\end{aligned}$$

Donc $[P|A]\in E_k$. Enfin, si $B=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}[[P|A]|B](X,Y) &= [P|A](a'(aX+bY)+b'(cX+dY),c'(aX+bY)+d'(cX+dY))\\ &= P((aa'+b'c)X+(a'b+b'd)Y,(ac'+b'c)X+(c'b+d'd)Y)\\ &= [P|AB]\end{aligned}$$

2. (a) On a $S^2=-I$, $ST=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $(ST)^2=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $(ST)^3=I$.

(b) On a $([P_0|S]+P_0)(X,Y)=P_0(Y,-X)+P_0(X,Y)=Y^k-(-X)^k+X^k-Y^k=0$, car k est pair et

$$\begin{aligned}([P_0|(ST)^2]+[P_0|ST]+P_0)(X,Y) &= P_0(-X-Y,X)+P_0(Y,-X-Y)+P_0(X,Y)\\ &= (-X-Y)^k-X^k+Y^k-(-X-Y)^k\\ &\quad +X^k-Y^k\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $P_0\in\mathscr{A}_k\cap\mathscr{B}_k$.

3. Il est clair que l'application $P\mapsto[P|T]-P$ est linéaire. Elle est à valeur dans E_k^0, puisque, si $P\in E_k$,

$$([P|T]-P)(X,0)=P(X,0)-P(X,0)=0.$$

Soit $Q \in E_k^0$, $Q(X,Y) = \sum_{n=0}^{k} b_n X^n Y^{k-n}$. Comme $Q(X,0) = 0$, alors $b_k = 0$, donc $Q(X,Y) = \sum_{n=0}^{k-1} b_n X^n Y^{k-n}$.
Considérons l'équation

$$(\mathscr{E})\ \ [P|T] - P = Q.$$

Si $P = \sum_{n=0}^{k} a_n X^n Y^{n-k}$, l'équation $(\mathscr{E})$ s'écrit

$$\sum_{n=0}^{k} a_n \sum_{i=0}^{n-1} \mathtt{C}_n^i X^i Y^{k-i} = \sum_{n=0}^{k-1} b_n X^n Y^{k-n}.$$

On en déduit le système :

$$\begin{pmatrix} \mathtt{C}_0^0 & \mathtt{C}_1^0 & \mathtt{C}_2^0 & \dots & \mathtt{C}_{k-1}^0 \\ 0 & \mathtt{C}_1^1 & \mathtt{C}_2^1 & \dots & \mathtt{C}_{k-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathtt{C}_{k-2}^{k-2} & \mathtt{C}_{k-1}^{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathtt{C}_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{k-2} \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$$

C'est un système inversible, c'est-à-dire pour $Q \in E_k^0$ il existe au moins un polynôme (a_0 libre) tel que $[P|T] - P = Q$, don l'application en question est surjective.

4. Soit $P = \sum_{n=0}^{k} a_n X^n Y^{k-n} \in E_k$. On a :

$$P = a_0 Y^k + \sum_{n=1}^{k-1} a_n X^n Y^{k-n} + a_k X^k - a_k Y^k + a_k Y^k = a_k(X^k - Y^k) + R$$

avec $R = a_0 Y^k + \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n Y^{k-n} + a_k Y^k \in E_k^0$. D'après 3., il existe $Q_1 \in E_k$ tel que $[Q_1|T] - Q_1 = R$.
Soit maintenant $Q = [Q_1|S^{-1}]$, on obtient donc :

$$[Q|ST] - [Q|S] = [[Q_1|S^{-1}]|ST] - [[Q_1|S^{-1}]|S] = [Q_1|T] - Q_1 = R,$$

d'où

$$P = a_k P_0 + (Q - [Q|S]) + ([Q|ST] - Q).$$

5. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $\forall Q \in E_k$, $Q - [Q|S] \in \mathscr{A}_k$ et $[Q|ST] - Q \in \mathscr{B}_k$ puisque $P_0 \in \mathscr{A}_k \cap \mathscr{B}_k$. En effet, on a :

$$[Q - [Q|S]|S] + Q - [Q|S] = [Q|S] - [Q|S^2] + Q - [Q|S] = [Q|S] - [Q| - I] + Q - [Q|S].$$

Si $Q = \sum_{n=0}^{k} a_n X^n Y^{k-n}$, alors $[Q| - I](X,Y) = \sum_{n=0}^{k} a_n (-X)^n (-Y)^{k-n} = Q(X,Y)$ car k est pair. Donc $[Q - [Q|S]|S] + Q - [Q|S] = 0$, c'est-à-dire $Q - [Q|S] \in \mathscr{A}_k$.

De même , si on pose $P = [Q|ST] - Q$, on a :

$$\begin{aligned} [P|(ST)^2] + [P|ST] + P &= [Q|(ST)^3] - [Q|(ST)^2] + [Q|(ST)^2] - Q \\ &= [Q|I] - Q = Q - Q = 0. \end{aligned}$$

Donc $[Q|ST] - Q \in \mathscr{B}_k$.
Ainsi chaque élément de E_k s'écrit comme somme de deux éléments, l'un dans $\mathscr{A}_k$ et l'autre d'autre dans $\mathscr{B}_k$.

6. Soit $P = \sum_{n}^{m} a_n X^n Y^{k-n} \in \mathscr{A}_k$, donc $([P|S]+P)(X,Y) = P(Y,-X)+P(X,Y) = 0$ égalité qui s'écrit avec les coefficients de P sous la forme

$$\sum_{n=0}^{k}((-1)^n a_n + a_{k-n})X^{k-n}Y^n = 0$$

Donc pour tout $n \in [\![0,k]\!]$, $(-1)^n a_n + a_{k-n} = 0$ ou encore $a_{k-n} = (-1)^{n+1}a_n$. Posons $k = 2l$. Donc, en particulier, pour $n = l$ on obtient $a_l = (-1)^{l+1}a_l$, d'où $a_l = 0$ si l est pair. En conclusion :

- Si $l = 2p$, la famille libre $(X^nY^{k-n} + (-1)^{n+1}X^{k-n}Y^n)_{n\in[\![0,l-1]\!]}$ engendre $\mathscr{A}_k$, donc $\dim \mathscr{A}_k = \dfrac{k}{2}$.
- Si $l = 2p+1$, la famille libre $\{(X^nY^{k-n} + (-1)^{n+1}X^{k-n}Y^n)_{n\in[\![0,l-1]\!]}, X^lY^l\}$ engendre $\mathscr{A}_k$, donc $\dim \mathscr{A}_k = \dfrac{k}{2} + 1$.

7. (a) On a $ST = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(ST - xI) = x^2 + x + 1$. Donc les valeurs propres de ST sont j et j^2 ($j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$) et par conséquent ST est diagonalisable, des valeurs propres associées respectivement sont $v_1 = (1,j)$ et $v_2 = (1,j^2)$. On a la relation

$$ST = M^{-1}DM$$

avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

(b) Notons φ l'endomorphisme de E_k définie par $\varphi(P) = [P|ST]$. On remarque que $\forall P \in E_k$, $\varphi^3(P) = [P|(ST)^3] = [P|P] = P$, donc le polynôme X^3-1 annule φ, donc φ est diagonalisable. On a, d'après la question précédente, $[P|ST] = [P|M^{-1}DM] = [[P|M^{-1}]|D|M]$. Notons ψ l'endomorphisme de E_k défini par $\psi(P) = [P|M]$ et ϕ_D l'endomorphisme de E_k défini par $\phi(P) = [P|D]$. L'égalité $(*)$ s'écrit donc

$$\varphi = \psi^{-1}\phi\psi.$$

Or $\forall n \in [\![0,k]\!]$,

$$\phi(X^nY^{k-n} = (JX)^n(j^2Y)^{k-n} = j^{2k-n}X^nY^{k-n},$$

ceci montre, une autre fois, que φ est diagonalisable et que les valeurs propres sont exactement $1, j$, et j^2. Les calculs montre aussi qu'une base de vecteurs propres est donnée par les polynômes $V_n = \dfrac{1}{j^2-j}(j^2X-Y)^n(Y-jX)^{k-n}$, $n \in [\![0,k]\!]$.

• • • • • • • • • • •