Devoir libre $n°5$
correction

1. La première relation est déjà vu dans le cours. La deuxième s'obtient en appliquant la première formule avec $x = a - m$ et $y = \dfrac{b-c}{2}$.

2. • $\{\|a - x\|/x \in A\}$ est un ensemble de réels non vide, minoré par 0, donc admet une borne inférieure.
• Posons donc $\delta = d(x, A)$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|a - x_n\| = d(a, A).$$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, pour cela il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy, puisque $\mathbb{R}$ est complet. D'après la relation (1), on a pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$$(5) \quad \|(a - x_p) + (a - x_q)\|^2 + \|x_p - x_q\|^2 = 2\left(\|a - x_p\|^2 + \|a - x_q\|^2\right).$$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{x_p + x_q}{2} \in A$, donc $\left\|a - \dfrac{x_p + x_q}{2}\right\| \geq \delta$, ou encore $\|(a - x_p) + (a - x_q)\|^2 \geq 4\delta^2$, d'où, d'après (5) :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ \ \|x_p - x_q\|^2 \leq 2[(\|a - x_p\|^2 - \delta^2)\| + (\|\|a - x_q)\|^2 - \delta^2)]$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \|a - x_n\| = \delta$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Soit $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Comme A est un fermé, on a $\alpha \in A$ et

$$\|a - \alpha\| = \lim_{n\to\infty} \|a - x_n\| = \delta = d(a, A).$$

• Supposons qu'il existe une autre solution $\beta \in A$ tel que $\|a - \beta\| = d(a, A)$. On prend $s = \alpha - a$ et $t = \beta - a$. On a : $\|s + t\|^2 + \|s - t\|^2 = 2(\|s\|^2 + \|t\|^2)$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\alpha - \beta\|^2 &= \delta^2 + \delta^2 - \frac{1}{2}\|\alpha + \beta - 2a\|^2 \\ &= \delta^2 + \delta^2 - 2\left\|\frac{\alpha + \beta}{2} - u\right\|^2 \\ &\leq \delta^2 + \delta^2 - 2\delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Donc $\beta = \alpha$.

3. (a) En effet, on a en fait $E_1 = \{p_A(x)\}$ par définition et unicité de la projection. Donc montrer $E_1 = E_2$ équivalent à donc $E_2 = \{p_A(x)\}$, c'est-à-dire $p_A(x)$ est l'unique élément $z \in A$ tel que $(x - z|z - y) \geq 0$.

(b) L'identité demandée est facile à établir. Montrons maintenant l'égalité des ensembles E_1 et E_2.
Soit $z \in E_2$, alors $\forall z \in A$, $(x - z|z - y) \geq 0$, donc $\|x - y\|^2 - \|x - z\|^2 \geq 0$, d'où $\|x - z\| \leq \|x - y\|$ et $z \in E_1$. Donc $E_2 \subset E_1$.
Réciproquement, soit $z \in E_1$ et $y \in A$ quelconque. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, $y_t = ty + (1 - t)z$ appartient à A car A convexe.
On a donc $\|x - z\| \leq \|x - y_t\|$ (puisque $z \in E_1$) d'où $\|x - ty - (1 - t)z\|^2 - \|x - z\|^2 \geq 0$ puis, en utilisant (4), $2t(x - z|z - y) + t^2\|z - y\|^2 \geq 0$, d'où

$$t\|z - y\|^2 + 2(x - z|z - y) + \geq 0 \text{ pour tout } t \in]0, 1].$$

En faisant tendre t vers 0^+, on obtient $(x - z|z - y) \geq 0$ et donc $z \in E_2$. Ainsi $E_1 \subset E_2$ et finalement $E_1 = E_2$.

4. Pour le sens direct, il suffit d'appliquer (3) avec $P_A(y)$ à la place de y (ce qui est possible car $P_A(y) \in A$), et on obtient l'inégalité cherchée.
Réciproquement, si $y \in A$, on a $P_A(y) = y$ d'où l'inégalité $(x - P_A(x)|P_A(y) - P_A(y))$ implique $(x - P_A(x)|P_A(x) - y) \geq 0$ pour tout $y \in A$.

5. (a) Soit $y \in C^\perp$. Alors $\forall x \in C$, $(x|y) \leq 0$ donc $\forall x \in C$, $\forall \lambda > 0$ $(x|\lambda y) \leq 0$. Par suite $\lambda y \in C^\perp$ c'est-à-dire $\lambda C^\perp \subset C^\perp$.
Mais on a de la même façon : $\dfrac{1}{\lambda} C^\perp \subset C^\perp$ soit donc $C^\perp \subset \lambda C^\perp$ et finalement $C^\perp = \lambda C^\perp$. Enfin, $C^\perp$ est non vide car $0 \in C^\perp$ de façon évidente : $C^\perp$ est donc bien un cône de sommet O.
Soient $y, z \in C^\perp$ et $t \in [0, 1]$. Alors, pour tout $x \in C$

$$(x|ty + (1-t)z) = t(x|y) + (1-t)(x|z) \leq 0$$

car $t \in [0, 1]$.
Donc $ty + (1-t)z \in C^\perp$: $C^\perp$ est donc convexe.
Soit, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_x : y \longmapsto (x|y)$. φ_x est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ de dimension finie, donc φ_x est continue. Par suite, $\{y/\varphi_x(y) \leq 0\}$, qui est l'image réciproque par φ_x du fermé $]-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$C^\perp = \bigcap_{x \in C} \varphi_x^{-1}\left(]-\infty, 0]\right)$$

est fermé comme intersection de fermés.

(b) Si C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors si $x \in C$, $-x \in C$. Donc si $y \in C^\perp$, on a $(x|y) \leq 0$ et $(-x|y) \leq 0$, d'où $(x|y) = 0$. Ainsi, $C^\perp$ est le sous-espace vectoriel orthogonal à C.

6. (a) Supposons qu'on puisse écrire $x = y + y^\perp$ avec $y \in C$ et $y^\perp \in C^\perp$ et $(y|y^\perp) = 0$. Alors, pour tout $z \in C$,

$$(x - y|y - z) = (y^\perp|y - z) = (y^\perp|y) - (y^\perp|z) \geq 0.$$

D'après la caractérisation de la projection, cela montre que $y = P_C(x)$.
$y^\perp = P_{C^\perp}$ se démontre exactement de la même manière.
Ainsi, la décomposition si elle existe, est unique et est de la forme demandée.

(b) On sait que

$$\forall y \in C, \ \ (x - P_C(x)|P_C(x) - y) \geq 0 \ \ (6).$$

Or $P_C(x) \in C$, donc $2P_C(x) \in C$ (car C est cône) donc, en appliquant ce qui précède à $y = 2P_C(x)$, on obtient $(x - P_C(x)| - P_C(x)) \geq 0$ soit

$$(x - P_C(x)|P_C(x)) \leq 0.$$

D'autre part, $0 \in C$, en effet, si $x \in C$ (c existe car C est non vide), on a $\forall \lambda > 0$, $\lambda c \in C$. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} c \in C$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} C \in C$ car C est un fermé. Donc $0 \in C$.
En appliquant la relation précédente (6) à $y = 0$, on trouve :

$$(x - P_C(x)|P_C(x)) \geq 0.$$

Finalement, on a montré que $(x - P_C(x)|P_C(x)) = 0$.
La relation (6) donne alors $\forall y \in C$

$$(x - P_C(x)|P_C(x)) - (x - P_C(x)|y) \geq 0$$

soit $(x - P_C(x)|y) \leq 0$. Ainsi $x - P_C(x) \in C^\perp$.
En posant $y^\perp = x - P_C(x)$, on a bien $x = y + y^\perp$, $y \in C$, $y^\perp \in C^\perp$ et $y = P_C(x)$ et $(y|y^\perp) = 0$.

• • • • • • • • • • •