Devoir libre $n°5$
correction

CORRECTION

I-TRANSFORMATION D'ABEL

1. (a) Il est clair que $B_0 = b_0$ et $\forall n \geq 1$, $B_n - B_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k = b_n$.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (B_k - B_{k-1}) + a_n b_n \\ &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_{k-1} + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.\end{aligned}$$

2. (a) Soit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$. Donc pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n B_n| \leq \varepsilon$, donc la suite $(a_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|(a_n - a_{n+1}) B_n| \leq |a_n - a_{n+1}|$, donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$ est absolument convergente.

D'après la question 1.(a), la suite de sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ est convergente, comme somme de deux suites convergentes, donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ est convergente.

3. Dans ces conditions, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k - a_{k+}| = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$. Donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente, donc on a les hypothèses de la question 2., donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

4. Soit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série alternée. Quitte à multiplier par -1, on peut supposer $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons donc $a_n = |u_n|$ et $b_n = (-1)^n$. Les deux hypothèses de la question précédente sont bien vérifiées, donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ est convergente c'est-à-dire la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n |u_n|$ est convergente.

II-APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

1. Puisque $x \neq 2k\pi$, alors $e^x \neq 1$ et par conséquent :

$$C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{p=1}^{n} e^{ipx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{\frac{-inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{-ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Donc

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{p=1}^{n} e^{ipx}\right) = \frac{1}{2} + \cos(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(2n+1)\dfrac{x}{2}}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)};$$

et

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{p=1}^{n} e^{ipx}\right) = \sin(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+1)\dfrac{x}{2}\sin n\dfrac{x}{2}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ fixé. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $b_n = \sin nx$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$. Clairement $(a_n)_{n,\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de limite 0, et il résulte de da la question précédente :

$$\exists M_x > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^* \ |B_n| \leq M_x. \left(M_x = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \right)$$

Donc d'après la première partie, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin nx}{n}$ converge. Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin nx}{n}$ est clairement convergente.

3. (a) Il est clair que f est impaire et 2π-périodique.

(b) Soit $x \in]0, 2\pi[$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right)' = \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \int_x^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

4. (a) On vérifie facilement que la fonction h est $\mathscr{C}^1$ sur $[x, \pi]$ et que $h'(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$. De plus $\forall t \in [x, \pi], \ \ |h'(t)| \leq \dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$, donc h' est bornée sur $[x, \pi]$.

(b) Donc par une intégration par parties on obtient :

$$\int_x^{\pi} h(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} + \int_x^{\pi} h'(t)\cos(n+\frac{1}{2})tdt\right).$$

(c) On a $\forall t \in [x, \pi]$, $\sin\dfrac{x}{2} \leq \sin\dfrac{t}{2} \leq 1$, donc :

$$\left|\int_x^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt\right| \leq \frac{2}{2n+1}\left(\int_x^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}dt + \sup_{t\in[x,\pi]}|h'(t)|(\pi - x)\right) \leq \frac{N_x}{2n+1}$$

où

$$N_x = 2(\pi - x)\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} + \sup_{t\in[x,\pi]}|h'(t)|\right),$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt = 0.$

(d) D'après ce qui précède $\forall x \in]0,\pi]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}$, c'est-à-dire $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ sur l'intervalle $]0,\pi]$ (l'égalité est bien vérifié pour $x = \pi$).
Si $x \in]\pi, 2\pi[$, $x - 2\pi \in]-\pi, 0[$ et donc

$$f(x) = f(x-2\pi) = -f(2\pi - x) = -\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{\pi - x}{2}.$$

D'où $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

III-CALCUL D'UNE INTÉGRALE

1. La fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$, et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on peut donc prolonger $f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

D'où $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ existe et $I = \int_0^1 \widetilde{f}(x)dx$.

2. Soit $x \in]0,1]$ fixé. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\ln$ entre 1 et $1+x$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists c_n \in]1, 1+x[$ tel que :

$$\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\ln^{(k)}(1) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ln^{(n+1)}(c_n) = \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)c_n},$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k-1}\right| \leq \frac{1}{n+1},$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|f(x) - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k-1}\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Cette inégalité valable aussi pour $x = 0$, donc on a montré que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\widetilde{f}$. Ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \int_0^1 \widetilde{f}(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

•••••••••••••