Devoir libre $n°7$
Corrigé

1. g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, de plus $\lim\limits_{x\to 0} xg(x) = 1$, donc $g \in E$. h n'est pas définie en 1, donc $g \notin E$.

2. On a $f_1(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$. f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, d'autre part, en utilisant la formule de la moyenne, il existe c_x compris entre x et 0 tel que

$$xf_1(x) = x\int_0^x tf(t)dt = x(c_x f(c_x)).$$

Comme c_x tend vers 0, $c_x f(c_x)$ tend vers une limite finie, d'où $\lim\limits_{x\to 0} xf_1(x) = 0$. Donc $f_1 \in E$.
La linéarité de Φ est une conséquence de la linéarité de l'intégrale. Soit $f \in E$ tel que $\Phi(f) = 0$, et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt = 0$, on obtient donc, par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad xf(x) = 0$$

Donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $g \in E$ qui n'est pas dérivable nécessairement, alors on ne peut trouver une fonction $f \in E$ telle que $\Phi(f) = g$, car $\forall f \in E$, $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc Φ n'est pas surjective.

3. On obtient, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{(x^2-t2)^n}{2^n n!} tf(t)dt \\
&= \left[f_1(t) \frac{(x^2-t^2)^n}{2^n n!} \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x^2-t2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} tf_1(t)dt \\
&= \int_0^x \frac{(x^2-t2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} tf_1(t)dt = F_n(f_1)(x).
\end{aligned}$$

Donc $f_{n+1} = F_n(f_1) = F_n(\Phi(f))$, puis on vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \;\; f_{n+1}(x) = \Phi(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^x tf_n(t)dt$.

4. (a) Soit $x > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
|H_{n+1}(x)| &= \frac{2^n n!}{(x^2+1)^n} \int_0^x \frac{(x^2-t2)^n}{2^n n!} tf(t)dt \\
&= \frac{1}{(x^2+1)^n} \int_0^x (x^2-t2)^n tf(t)dt \\
&\leq \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^n xM_x.
\end{aligned}$$

Si $x < 0$, nous avons $|H_{n+1}(x)| = -\dfrac{2^n n!}{(x^2+1)^n} \displaystyle\int_x^0 \frac{(x^2-t2)^n}{2^n n!} tf(t)dt \leq \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^n (-x)M_x$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité :

$$|H_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^n |x| M_x.$$

Soit maintenant I un intervalle borné, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x| \leq \alpha$, donc $M_x \leq M_\alpha$. D'autre part, par continuité, il existe $x_0 \in]-\alpha, \alpha[$ tel que

$$\sup_{|x|\leq\alpha} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x_0^2}{x_0^2+1} = k < 1.$$

Ainsi, $(*)\ \ \forall x \in I,\ \ |H_{n+1}(x)| \leq \alpha M_\alpha k^n$. Ceci montre que la suite de fonctions $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

(b) L'inégalité $(*)$ montre aussi que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} H_n$ converge uniformément sur tout intervalle borné I. Calculons la somme partielle associée à cette série. $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} H_{n+1}(x) &= \int_0^x tf(t) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{x^2-t^2}{x^2+1}\right)^n dt \\
&= \int_0^x tf(t) \frac{1-\left(\frac{x^2-t^2}{x^2+1}\right)^{N+1}}{1-\left(\frac{x^2-t^2}{x^2+1}\right)} dt, \quad \text{car } \left|\frac{x^2-t^2}{x^2+1}\right| \leq 1 \\
&= \int_0^x \frac{x^2+1}{t^2+1} tf(t) \left(1-\left(\frac{x^2-t^2}{x^2+1}\right)^{N+1}\right) dt
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} H_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{x^2+1}{t^2+1} tf(t)dt.$$

5. (a) On a $tf(t) = 1$, donc $f \in E$.

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(1) &= \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\
&= \frac{1}{2n} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k (-1)^k t^{2k} dt = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k \frac{(-1)^k}{2k+1} = v_n
\end{aligned}$$

(b) D'après ce qui précède, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(1) = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)} = 2\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

●●●●●●●●●●