Devoir libre $n°8$
Corrigé

1. (a) On pose, pour tout $\theta \in I$ et tout $x > 0$, $f(x,\theta) = \dfrac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}$. On a, $\forall \theta \in I, x \mapsto f(x,\theta)$ est continue sur $]0,+\infty[$, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-\beta}e^{i\theta}f(x,\theta) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{i\theta}}{1+xe^{itheta}} = 1$, donc $f(x,\theta) \simeq x^{\beta-2}e^{-i\theta}$ au voisinage de $+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0} x^{1-\beta}f(x,\theta) = 0$. Puisque $2-\beta > 1$ et $1-\beta < 1$, $x \mapsto f(x,\theta)$ est absolument intégrable sur $]0,+\infty[$.

On a $\phi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} = \frac{x^{\beta-1}}{1+x}dx$. Par le changement de variable $x = u^\alpha$, on obtient

$$\phi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha u^{\alpha-1}(u^\alpha)^{\beta-1}}{1+u^\alpha}du = \alpha\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^\alpha} = \alpha u(\alpha).$$

(b) La fonction f est continue sur $\left]\dfrac{1}{n}, n\right[\times I$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$ elle même continue. Donc ϕ_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et $\forall\theta \in I$,

$$\phi_n'(\theta) = -ie^{i\theta}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{x^\beta}{(1+xe^{i\theta})^2}dx.$$

(c) On montre, comme dans la question (a), que l'application $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)$ est absolument intégrable sur $]0,+\infty[$, de plus

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx - \int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx\right| \le \left|\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx\right| + \left|\int_n^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx\right|.$$

Or

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx\right| \le \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\beta}{(1-x)^2}dx$$

et

$$\left|\int_n^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx\right| \le \int_n^{+\infty}\frac{x^\beta}{(x-1)^2}dx.$$

Ceci montre que la suite de fonction $(\phi_n')_{n\ge1}$ converge uniformément vers $\theta \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx$ sur I, il en résulte, d'après le théorème du cours, que ϕ est $\mathscr{C}^1$ sur I et que

$$\phi'(\theta) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)dx = -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty}\frac{x^\beta}{(1+xe^{i\theta})^2}dx.$$

(d) Grace à une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\phi'(\theta) &= -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty}\frac{x^\beta}{(1+xe^{i\theta})^2}dx\\ &= i[\frac{x^\beta}{1+xe^{i\theta}}]_0^{+\infty} - i\int_0^{+\infty}\frac{\beta x^\beta}{1+xe^{i\theta}}dx\\ &= -i\beta\int_0^{+\infty}\frac{x^\beta}{1+xe^{i\theta}}dx\end{aligned}$$

Donc $\phi'(\theta)+i\beta\phi(\theta)=0$, par conséquent $\phi(\theta)=\phi(0)e^{-i\beta\theta}$. Mais $\phi(0)=\alpha u(\alpha)$, d'où,

$$\forall\theta\in I,\ \ \phi(\theta)=\alpha u(\alpha)e^{\frac{i\theta}{\alpha}}.$$

2. On a, pour tout $\theta\in I$,

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}(1+xe^{-i\theta})}{1+x^2+2x\cos\theta}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}(1+x\cos\theta)}{1+x^2+2x\cos\theta}dx-i\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta}\sin\theta}{1+x^2+2x\cos\theta}dx\end{aligned}$$

Donc, par comparaison de parties imaginaires :

$$\alpha u(\alpha)\sin(\beta\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta}\sin\theta}{1+x^2+2x\cos\theta}dx=L(\theta)$$

3. (a) On a, pour tout $\theta\in I$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta}{1+x^2+2x\cos\theta}dx &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta+(x+\cos\theta)^2}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sin\theta(1+(\frac{x+\cos\theta}{\sin\theta})^2)}dx\\ &= \int_{\frac{1}{\tan\theta}}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{1}{\tan\theta})=\theta.\end{aligned}$$

(b) On a, pour tout $\theta\in I$,

$$\begin{aligned}\alpha u(\alpha)\sin(\beta\theta)-\theta &= L(\theta)-\theta\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{(x^\beta-1)\sin\theta}{1+x^2+2x\cos\theta}dx\\ &= \int_0^{1}\frac{(x^\beta-1)\sin\theta}{1+x^2+2x\cos\theta}dx+\int_1^{+\infty}\frac{(x^\beta-1)\sin\theta}{1+x^2+2x\cos\theta}dx\\ &= \int_0^{1}\frac{(x^\beta-1)\sin\theta}{1+x^2+2x\cos\theta}dx+\int_1^{0}\frac{(\frac{1}{t^\beta}-1)\sin\theta}{1+\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}\cos\theta}\frac{-dt}{t^2},\ \ x=\frac{1}{t}\\ &= \int_0^{1}\frac{(1-x^\beta)^2\sin\theta}{x^\beta(1+x^2+2x\cos\theta)}dx\end{aligned}$$

D'où $\alpha u(\alpha)\sin(\beta\theta)-\theta=\sin\theta M(\theta)$ avec $M(\theta)=\displaystyle\int_0^1\frac{(1-x^\beta)^2\sin\theta}{x^\beta(1+x^2+2x\cos\theta)}dx$.

(c) Pour $x\in]0,1[$, on pose $g(x)=f(x,\pi)=\dfrac{(1-x^\beta)^2}{x^\beta(1-x)^2}$. On a, g est continue sur $]0,1[$, de plus $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{(1-x^\beta)^2}{x^\beta(1-x)^2}=\beta^2$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to0}x^\beta g(x)=1$. Puisque $\beta<1$, g est absolument intégrable sur $]0,1[$.

(d) Il suffit de montrer que $\frac{|M(\theta)| \leq 1}{1-\beta}$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$. Montrons que $\dfrac{(1-x^\beta)^2}{1+2x\cos\theta+x^2} \leq 1$ ou encore $(1-x^\beta)^2 \leq 1+2x\cos\theta+x^2$. Pour montrer cette inégalité il suffit de verifier que

$$x^{2\beta} - 2x^\beta \leq x^2 - 2x.$$

Posons maintenant

$$h(x) = x^{2\beta-1} - 2x^{\theta-1} - x + 2.$$

On $h'(x) = (2\beta-1)x^{2\beta-2} - 2(\beta-1)x^{\beta-1} - 1$ et $h''(x) = 2(\beta-1)x^{\beta-3}((2\beta-1)x^\beta - (\beta-2))$. Donc le signe de $h''(x)$ est celui de $k(x) = (1-2\beta)x^\beta - (2-\beta)$. Or $k'(x) = \beta(1-2\beta)x^{\beta-1}$. On a $k(0) < 0$ et $k(1) < 0$. Puisque k' est de signe constant sur $]0, 1]$, alors $\forall x \in]0, 1]$, $k(x) < 0$. Donc h est concave, $h(1) = h'(1) = 0$. L'inégalité demandée est donc bien démontrée. D'où

$$M(\theta) \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta}.$$

(e) En faisant tendre θ vers π dans l'égalité $|\alpha u(\alpha)\sin(\beta\theta) * \theta| \leq \dfrac{\sin\theta}{1-\beta}$, on obtient $u(\alpha) = \dfrac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}$ ou encore

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

• • • • • • • • • • •