Devoir libre $n°9$
Corrigé

Exercice 1

1. Soit $z \in \Omega$. On a $|f(t)e^{-zt}| \leq ce^{(\mathrm{Re}(z)-a)t}$, donc la fonction $t \mapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et par suite $\mathscr{L}f$ est bien définie en z.

2. Soit $z \in \Omega$ et soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\Omega\backslash\{z\}$ qui converge vers z. On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mathscr{L}f(z_n) - \mathscr{L}f(z)}{z_n - z} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z_n t} - e^{zt}}{z_n - z} f(t)dt = \int_0^{+\infty} h_n(t)dt$$

où $h_n(t) = \dfrac{e^{-z_n t} - e^{zt}}{z_n - z} f(t)$. Les fonctions h_n sont continues sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \geq 0$, $z \mapsto e^{-tz}$ est holomorphe, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $h : t \mapsto -tf(t)e^{-zt}$.
L'inégalité des accroissements finis appliquée à $z \mapsto e^{-tz}$ donne, pour tout $t > 0$:

$$\forall n \geq 0,\ \ |e^{-tz_n} - e^{-tz}| \leq t|z_n - z| \sup_{u\in[0,1]} |e^{-t(1-u)z_n + uz}|$$

Comme z et z_n sont dans Ω, alors $\mathrm{Re}(z) > a$ et $\mathrm{Re}(z_n) > 0$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n = \mathrm{Re}(z)$, posons $b = \dfrac{a + \mathrm{Re}(z)}{2}$, donc $b < \mathrm{Re}(z)$ et par conséquent il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{Re}(z_n) \geq b$, ainsi

$$\forall \geq n_0,\ \ |e^{-tz_n} - e^{-tz}| \leq te^{-bt}|z_n - z|$$

et donc

$$\forall n \geq n_0,\ \ |\varphi_n(t)| \leq t|f(t)|e^{-bt} \leq \varphi(t)$$

où $\varphi(t) = cte^{(a-b)t}$. φ étant continue intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de convergence dominé montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathscr{L}f(z_n) - \mathscr{L}f(z)}{z_n - z} = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt.$$

Ainsi $\mathscr{L}f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z et $(\mathscr{L}f)'(z) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$. La continuité de $(\mathscr{L}f)'$ se justifie en notant la continuité de la fonction $(t,z) \mapsto -tf(f)e^{-zt}$ et en utilisant la domination sur toute partie $[\alpha,+\infty[\times[0,+\infty[$ de Ω ($\alpha > a$), $|tf(t)e^{-zt}| \leq cte^{(\alpha-a)t}$.
Conclusion $(\mathscr{L}f)$ est holomorphe sur Ω et $\forall z \in \Omega$, $(\mathscr{L}f)'(z) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$.

Exercice 2

1. (a) D'après les données l'exercice $p(A) = \dfrac{15}{100} = 0.15$ et $p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{20}{100} = 0.2$. Nous obtenons donc $p(B/\bar{A}) = \dfrac{p(\bar{A}\cap B)}{p(B)}$, soit $p(B/\bar{A}) = \dfrac{4}{100} = 0.04$.

(b) Nous avons $p(B\cap A) = p(B/A)p(A)$, soit $p(B\cap A) = 0.2\times 0.15 = 0.03$. Mais $p(B\cap\bar{A}) = p(B/\bar{A})p(\bar{A})$. Ce qui donne $p(B\cap\bar{A}) = 0.04\times(1-0.15) = 0.034$.
Nous pouvons écrire $B = B\cap(A\cup\bar{A})$. Ce qui implique :

$$p(B) = p(B\cap A) + p(B\cap\bar{A}) = 0.030 + 0.034 = 0.064$$

(c) On a $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$. Ce qui donne $p(A/B) = \dfrac{0.030}{0.064} = 0.469$.

2. (a) Nous répétons plusieurs fois l'épreuve donc nous appliquerons la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec $n = 10$ et $p = p(A\cap B) = 0.003$.
Nous pouvons écrire :

$$p(X=k) = C_{10}^{k} \times 0.03^{k} \times (1-0.03)^{n-k} \text{ pour } k \in [0,10].$$

Ainsi : $p(X=k) = C_{10}^{k} \times 0.03 \times 0.97^{n-k}$.

(b) L'événement " deux individus au plus sont atteints de le maladie M_a et de la maladie M_b" correspond à "$X \leq 2$".
Donc :

$$p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0.0997$$

<u>Exercice</u> 3
Dans cette exercice, l'univers Ω est l'ensemble $\{1,2,...,n\}^2$, chaque couple a donc la probabilité d'être obtenu.

1. Si on appelle X_1 et X_2 les deux nombres obtenus dans l'ordre, on a donc $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$ et ils vérifient $X \leq Y$. Donc si $(a,b) \in \Omega$, l'événement $(X=a, Y=b)$

- est impossible si $a > b$
- se réduit à $\{(a,a)\}$ si $a = b$.
- est la réunion de $\{(a,b)\}$ et $\{(b,a)\}$ si $a < b$.

D'où :

$$p(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > b \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } a = b \\ \frac{2}{n^2} & \text{si } a < b. \end{cases}$$

2. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{1,2,...,n\}$. Pour tout $a \in \{1,2,...,n\}$, on a :

$$(X=a) = (X=a, Y=a) \cup (X=a, Y=a+1) \cup ... \cup (X=a, Y=n).$$

D'où

$$p(X=a) = p(a,a) + \sum_{b=a+1}^{n} p(a,b) = \frac{1}{n^2} + \frac{2(n-a)}{n^2} = \frac{2n-2a+1}{n^2}.$$

De même , $Y(\Omega) = \{1,2,...,n\}$ et pour tout $b \in \{1,2,...,n\}$, on a :

$$(Y=b) = (X=1, Y=b) \cup (X=2, Y=b) \cup ... \cup (X=b, Y=b-1) \cup (X=b, Y=b).$$

D'où

$$p(Y=b) = \sum_{a=1}^{b-1} p(a,b) + p(b,b) = \frac{2(b-1)}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2b-1}{n^2}.$$

3. Les événements $A_j = (X=j)$ ($1 \leq j \leq n$) forment un système complet, donc pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, on a :

$$p(Y=i) = \sum_{j=1}^{n} p(Y=i/_{X=j}) p(X=j) \quad (*).$$

Posons $a_{ij} = p(Y=i/_{X=j})$ et $M = (a_{ij})_{(1 \leq i,j \leq n)}$. La relation $(*)$ se traduit matriciellement par l'égalité $V = MU$. Calculons les coefficients de cette matrice M. Puisque $X \leq Y$, on a $a_{ij} = 0$ si $j > i$.

Par définition, $a_{ij} = p(X=i/_{Y=j}) = \dfrac{p(i,j)}{p(X=j)}$, c'est-à-dire d'après les questions **1.** et **2.** :

- Si $i = j$, $a_{jj} = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2n-2j+1}{n^2}} = \dfrac{1}{2n-2j+1}$.
- Si $i > j$, $a_{jj} = \dfrac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2n-2j+1}{n^2}} = \dfrac{2}{2n-2j+1}$.
- Si $i < j$, $a_{ij} = 0$.

D'où

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n-1} & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{2}{2n-1} & \frac{1}{2n-3} & & & 0 \\ \vdots & \frac{2}{2n-3} & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{2n-1} & \frac{2}{2n-3} & \cdots & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Il y a plusieurs matrices M vérifiant le relation demandée. On peut remarquer que pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p(Y = b) = p(X = n - b + 1)$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} p(Y=1) \\ p(Y=2) \\ \vdots \\ p(Y=n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(X=1) \\ p(X=2) \\ \vdots \\ p(X=n) \end{pmatrix}.$$

• • • • • • • • • • •