Devoir surveillé $n°3$
Correction

## Exercice

**1.** (a) Considérons l'application $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ qui est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$. On a $D = g^{-1}([0, 1])$ et $C = g^{-1}(\{1\})$, donc $D$ et $C$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

(b) $\triangle = g^{-1}[0, 1[$, donc $\triangle$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, puisque $[0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^+$.

(c) Montrons que $C$ est connexe par arcs. En effet, soit $A = (x_1, y_1)$ et $= (x_2, y_2)$ deux points de $C$, alors il existe $\theta_1$ et $\theta_2$ uniques de $[0, 2\pi[$ tels que $x_i = \cos(\theta_i)$ et $y_i = \sin(\theta_i)$ ( $i = 1, 2$ ). On peut supposer $\theta_1 \leq \theta_2$. L'application $\gamma : [\theta_1, \theta_2] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ est continue et $\gamma(\theta_1) = A$, $\gamma(\theta_2) = B$ et $\forall\theta \in [\theta_1, \theta_2] \in C$. Donc $C$ est connexe par arcs.

**2.** $D$ et $C$ sont des fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, donc ce sont des compacts de $\mathbb{R}^2$.

$\triangle$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^+$, en effet, si on considère la suite de terme général $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ et $1 \notin [0, 1[$. Donc $\triangle$ n'est pas un compact.

**3.** (a) On a $x \mapsto f(x, 0) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2+1) & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$. Le graphe de $f$ est donc composé de segments de droits et d'une parabole.

(b) $f$ est continue sur $\triangle$ et $\mathbb{R}^2 \backslash D$ comme composé de fonctions continues. Il reste à montrer la continuité en chaque point de $C$. Soit $(x_0, y_0) \in C$. On a

$$\lim_{\underbrace{(x,y)}_{(x,y)\in\triangle}\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{x^2+y^2} = f(x_0, y_0) = 1,$$

et

$$\lim_{\underbrace{(x,y)}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash D}\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+1\right) = 1.$$

Donc cette limite existe et vaut $f(x_0, y_0) = 1$,$f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

**4.** (a) $f$ admet des dérivées partielles premières en tout point de $\triangle\backslash\{(0, 0)\}$ et on a, pour tout $(x, y) \in \triangle\backslash\{(0, 0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

De même en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\triangle$, $f$ admet des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\triangle$ et on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\triangle$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y.$$

Soit maintenant $(x_0, y_0) \in C$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to0, h\neq0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si cette limite existe. Or

$$f(x_0+h,y_0)=\begin{cases}\sqrt{(x_0+h)^2+y^2}=\sqrt{1+2x_0h+h^2} & \text{si} \quad x_0h\leq 0,\\ \frac{1}{2}\left((x_0+h)^2+y^2+1\right)=1+hx_0+\frac{h^2}{2} & \text{si} \quad x_0h>0.\end{cases}.$$

lorsque $h$ tend vers 0, $\dfrac{\sqrt{1+2x_0h+h^2}-1}{h}$ tend vers $x_0$ et $\dfrac{1+x_0h+\frac{h^2}{2}-1}{h}$ tend vers $x_0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=x_0$. De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=y_0$.

Donc $f$ admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée en 0, si elle existe, de la fonction $x\mapsto f(x,0)=|x|$, or cette fonction n'est pas dérivable en 0. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. De même $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.
$f$ ne peut donc être différentiable en $(0,0)$, car si $f$ étant différentiable en $(0,0)$ elle admettrait des dérivées partielles en ce point.

(c) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \;\; (x,y)\in\triangle\backslash\{(0,0)\},\\ x & \text{si} \;\; (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\\ x & \text{si} \;\; (x,y)\in C.\end{cases}$$

De même

Soit $(x_0,y_0)\in C$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \;\; (x,y)\in\triangle\backslash\{(0,0)\},\\ x & \text{si} \;\; (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\\ x & \text{si} \;\; (x,y)\in C.\end{cases}\\ &= x_0\end{aligned}$$

Cette limite existe donc et vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en tout point de $C$.

(d) Les fonctions $(x,y)\mapsto\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $(x,y)\mapsto x$ sont continues respectivement en tout point de $\triangle\backslash\{(0,0)\}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\triangle$ comme composé et produits des fonctions continues. D'après c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en tout point de $C$, par suite $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(e) $f$ admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, donc elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

## Problème

### Première partie

1. Les coefficients de $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et de $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ étant tous positifs, ceux de $AB=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ le sont aussi, avec $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. De plus, la somme des coefficients de la $i$-ème ligne de $AB$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}=1\times 1=1$$

ce qui montre que $AB\in S$.

2. Il est alors immédiat par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$ que $A^k\in S$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. C'est vrai aussi pour $k=0$ car $A^0=I$.

3. Posons $Y=AX=(y_1,\dots,y_n)$. On a , pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ et donc

$$|y_i|\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\leq\|X\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\|X\|.$$

D'où $\|AX\|\leq\|X\|$.

4. Le vecteur $e=(1,1,\dots,1)$ vérifie $Ae=e$, donc $e$ est propre pour la valeur propre 1.

5. Soit $X$ un vecteur propre non nul associé à $\lambda$, alors $AX=\lambda X$, d'où $\|AX\|=|\lambda|\|X\|\leq\|X\|$ d'après 3. Comme $X$ n'est pas le vecteur nul, $\lambda\leq 1$.

6. (a) i. Puisque $X\in\ker(A-\lambda I)^2$, $A^2X=\lambda^2X+2Y$. Donc la propriété en question est varie pour $k=0$ et on conclut par récurrence sur $k\geq 2$.

   ii. L'égalité précédente entraîne, pour tout $k\geq 2$ :

$$\|\lambda^kX+k\lambda^{k-1}Y\|\leq\|X\|$$

   et donc

$$\|k\lambda^{k-1}Y\|-\|\lambda^kX\|\leq\|X\|$$

   D'où

$$\|Y\|\leq\frac{2}{k}\|X\|$$

   On obtient, quand $k$ tend vers l'infini, $\|Y\|=0$, et donc $Y=0$.

   iii. Il résulte de ce qui précède que $\ker(A-\lambda I)^2\subset\ker(A-\lambda I)$, comme l'inclusion inverse est évidente, on a l'égalité $\ker(A-\lambda I)^2=\ker(A-\lambda I)$.

   (b) Le résultat se démontre par récurrence sur $k$. Il est vrai pour $k=2$. Admettons le pour $k-1$ et soit $X\in\ker(A-\lambda I)^k$ et $Y=(A-\lambda I)X$, alors $Y\in\ker(A-\lambda I)^{k-1}$ d'où $X\in\ker(A-\lambda I)^2=\ker(A-\lambda I)$ ce qui achève la démonstration, l'inclusion inverse étant évidente.

## Deuxième partie

1. (a) On a, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ :

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\right|=\frac{1}{p}\left|\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-p}\right|\leq\frac{2}{p|1-\lambda|}.$$

   Donc $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p}\lambda^k=0$.

(b) Si $X \in \ker(A-\lambda I)$, alors $A^kX = \lambda^k X$ et donc $X_p = \left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^p\right)X$, donc $\lim_{p\to\infty} X_p = 0$.

**2.** Si $A$ est diagonalisable, tout vecteur $X$ est somme de vecteurs propres, soit $X = \sum_{i=0}^{r} X_i$ avec $AX_i = \lambda_i X_i$. Alors $X_p = \frac{p+1}{p}X_0 + \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda_i^k\right)X_i$. Donc $\lim_{p\to\infty} X_p = X_0 \in \ker(A-\lambda I)$.

**3.** (a) En mettant $A$ sous la forme $(A-\lambda I)+\lambda I$ et en remarquant que $I$ commute avec toute autre matrice, on peut calculer $A^k$ par application de la formule du binôme :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j (A-\lambda I)^j(\lambda I)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j.$$

Si $X \in \ker(A-\lambda I)^q$, alors $(A-\lambda I)^k X = 0$, pour tout $k \geq q$ et donc

$$A^kX = \sum_{j=0}^{q-1} \mathrm{C}_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X.$$

(b) Il suffit de montrer que $\mathrm{C}_k^j\lambda^{k-j}$ est le terme général d'une série convergente. En effet, on a :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\mathrm{C}_{k+1}^j\lambda^{k+1-j}}{\mathrm{C}_k^j\lambda^{k-j}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+1-j}|\lambda| = |\lambda| < 1.$$

Donc d'après la règle de D'Alembert, la série de terme général $\mathrm{C}_k^j\lambda^{k-j}$ est convergente et par conséquent $\lim_{k\to\infty}\mathrm{C}_k^j\lambda^{k-j} = 0$.

(c) Pour $p \geq q$, on a :

$$X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{q-1}A^kX + \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=q}^{p}\mathrm{C}_k^j\lambda^{k-j}(A-\lambda I)^jX$$

Lorsque $p$ tend vers $+\infty$, le premier terme de cette somme tend vers 0. De plus, il résulte de b) que $\frac{1}{p}\sum \mathrm{C}_k^j\lambda^{k-j} = \frac{p-q+1}{p}\frac{1}{p-q+1}\sum_{k=q}^{p}\mathrm{C}_k^j\lambda^{k-j}$ tend vers 0 quand $p$ tend vers l'infini, car la convergence d'une suite implique sa convergence au sens de Cesàro. Donc $\lim_{p\to\infty}X_p = 0$.

**4.** (a) Le théorème de Cayley-Hamilton montre que $P_A$ est un polynôme annulateur de $A$. En supposant que les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts, le théorème de décomposition des noyaux affirme alors que

$$F = \left(\bigoplus_{j=0}^{s}\ker(A-\lambda_jI)^{k_j}\right)\bigoplus\left(\bigoplus_{j=s+1}^{r}\ker(A-\lambda_jI)^{q_j}\right)$$

D'après la première partie, on a donc :

$$F = \left(\bigoplus_{j=0}^{s}\ker(A-\lambda_jI)\right)\bigoplus\left(\bigoplus_{j=s+1}^{r}\ker(A-\lambda_jI)^{q_j}\right)$$

(b) Décomposons $X$ dans cette somme directe :

$$X = X_0 + X_1 + \ldots + X_s + X_{s+1} + \ldots + X_r.$$

Alors

$$X_p = (X_0)_p + \ldots + (X_s)_p + (X_{s+1})_p + \ldots + (X_r)_p.$$

D'où :

• $(X_0)_p = \dfrac{p+1}{p} X_0$ tend vers 0, quand $p$ tend vers l'infini.

• Pour $1 \leq j \leq s$, $X_j$ est un vecteur propre associé à une valeur propre de module 1 mais différente de 1. D'après 1 b), $\lim\limits_{p\to\infty} (X_j)_p = 0$.

• Pour $s+1 \leq j \leq r$, $X_j$ est un vecteur vérifiant les hypothèses de 3, d'après 3 c), $\lim\limits_{p\to\infty} (X_j)_p = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{p\to\infty} X_p = X_0$.

• • • • • • • • • • •