Devoir surveillé n°3

Correction

Exercice

1. La fonction f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, en effet $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Si f est différentiable en $(0,0)$ on aura nécessairement

$$\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2,\quad df_{(0,0)}(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)k+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k=0$$

et on doit avoir

$$f((0,0)+(h,k))=f(0,0)+df_{(0,0)}(h,k)+\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$.

Or on a, pour $(h,k)\neq(0,0)$, $\varepsilon(h,k)=\dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}e^{-\sqrt{h^2+k^2}}$, donc

$$|\varepsilon(h,k)|\leq\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq\frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2}$$

(on a utilisé l'inégalité $|hk|\leq\dfrac{1}{2}(h^2+k^2)$.)

Donc $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$.

En conclusion, f est différentiable en $(0,0)$ et $\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2$, $df_{(0,0)}(h,k)=0$.

2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=ye^{-\sqrt{x^2+y^2}}\left(1-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xe^{-\sqrt{x^2+y^2}}\left(1-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

3. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, il faut montrer que les dérivées partielles existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Il suffit donc de montrer la continuité en $(0,0)$ des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ puisqu'elles sont continues en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a $0\leq\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\sqrt{x^2+y^2}$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ puis $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. De même $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(h,k)\in\mathbb{R}^2$,

$$df_{(x,y)}(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)k+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k.$$

4. Soit $(x,y)\in B\setminus\{(0,0)\}$, on a $\sqrt{x^2+y^2}\leq 1$ et $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\sqrt{x^+y^2}\leq 1$, donc $0\leq 1-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1$, on obtient donc $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq|y|e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$, de même $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leq|x|e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. Les deux inégalités sont encore vraies pour $(0,0)$ car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

5. $\forall (x,y)\in B$, $\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$|df_{(x,y)}(h,k)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right||k|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right||k| \leq e^{-\sqrt{x^2+y^2}}(|h||y|+|k||x|) \leq e^{-\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{h^2+k^2}).$$

D'où

$$|df_{(x,y)}(h,k)| \leq \frac{1}{e}\|(h,k)\|.$$

On utilisé l'inégalité $te^{-t} \leq \dfrac{1}{e}$ avec $t = x^2+y^2 \in [0,1]$.

6. D'après la question précédente, on a $\forall (x,y)\in B$ $|||df_{(x,y)}||| \leq \dfrac{1}{e}$. B étant convexe, on obtient d'après le théorème des accroissements finis que :

$$\forall (x,y),(x,y')\in B,\quad |f(x,y)-f(x',y')| \leq \frac{1}{e}\|(x,y)-(x',y')\|.$$

Problème

Préliminaire

1. Si P est un polynôme alors $f_n(P)$ aussi et $\deg(f_n(P)) \leq \deg(P)$ donc $P\in\mathbb{C}_n[X] \Rightarrow f_n(P)\in\mathbb{C}_n[X]$. De plus f_n est linéaire (par linéarité de la dérivation) donc f_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$

Première partie

2. On vérifie facilement que $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Une base de $\ker(f_3)$ est $(X, 1+X^2)$, une base de $\mathrm{Im}(f_3)$ est $(1,-3X+X^3)$, de plus $\ker(f_3)\cap\mathrm{Im}(f_3)=\{0\}$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f_3))+\dim(\mathrm{Im}(f_3)) = 4 = \dim(\mathbb{C}_3[X])$, d'où :

$$\ker(f_3)\oplus\mathrm{Im}(f_3) = \mathbb{C}_3[X].$$

3. Nous avons $M_3^2 = M_3$ donc f_3 est un projecteur, donc f_3 est diagonalisable (annulé par un polynôme scindé à racines simples). Ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre $\ker(f_3) = \mathrm{Vect}(X, 1+X^2)$ et 1 de sous-espace propre $\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}(1,-3X+X^3)$.

Deuxième partie

5. Les calculs de $f_4(X^i)$, $\;i=0,1,2,3,4$ donne

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. M_4 étant triangulaire, donc son polynôme caractéristique est $\chi_{M_4}(X) = X^2(X-1)^2(X-3)$, d'où les valeurs propres : 0,1 et 3.
Les vecteurs propres de f_3 sont aussi vecteurs propres de f_4 donc :
• $P_1 = X, P_2 = 1+X^2$ sont vecteurs propres de f_4 associés à 0 d'où $\dim(E_0)\geq 2$.
• $Q_1 = 1, Q_2 = -3X+X^2$ sont vecteurs propres de f_4 associés à 1 d'où $\dim(E_1)\geq 2$.
La dimension de chaque sous-espace propre est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée et supérieure ou égale à 1. On a donc

$$\dim(E_0) = 2 \text{ , } \dim(E_1) = 2 \text{ et } \dim(E_3) = 1.$$

On a égalité entre la dimension de chaque sous-espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée, donc f_4 est diagonalisable .

7. Considérons les matrices diagonales d'ordre 5 suivantes :

$$D = \operatorname{diag}(0,0,1,1,3), \ D_a = \operatorname{diag}(0,0,1,1,0) \text{ et } D_b = \operatorname{diag}(0,0,0,0,3).$$

M_4 étant diagonalisable, donc il existe $P \in GL_5(\mathbb{C})$ tel que $M_4 = PDP^{-1}$. Notons

$$A = PD_aP^{-1} \text{ et } B = PD_bP^{-1}.$$

On peut vérifier facilement que $M_4 = A + B$, $A^2 = A$, $B^2 = 3B$ et $AB = BA = 0$. Donc le couple (A, B) convient.
Enfin $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(D_a) = 2$ et $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(D_b) = 1$.

8. On a $M_4 = A + B$ et $AB = BA = 0_5$ donc d'après la formule du binôme : $M_4^n = A^n + B^n$. De plus de l'égalité $B^2 = 3B$, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = 3^{n-1}B$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_4^n = A + 3^{n-1}B.$$

Troisième partie

9. Soit P un polynôme non nul de degré k : $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$ avec $a_k \neq 0$. Alors :

$$f_n(P) = -a_2 + a_0 + \cdots + \left[\frac{1}{2}k(k-1) - k + 1\right] a_kX^k = -a_2 + a_0 + \cdots + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)a_kX^k.$$

donc $k \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{2}(k-1)(k-2) \neq 0 \Rightarrow f_n(P) \neq 0$. Par contraposée : $f_n(P) = 0 \Rightarrow \deg(P) \leq 2$. On est alors ramené à $\mathbb{C}_2[X]$, ou encore $\mathbb{C}_3[X]$. D'où :

$$\ker(f_n) = \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2).$$

10. On a $\operatorname{rg}(f_n) = \dim(\mathbb{C}_n[X]) - \dim(\ker(f_n)) = n - 1$. La famille $(f_n(1), f_n(X^3), ..., f_n(X^n))$ comporte $n - 1$ éléments appartenant à $\operatorname{Im}(f_n)$. De plus cette famille est libre car :

$$\lambda_0 f_n(1) + \lambda_3 f_n(X^3) + \cdots + \lambda_n f_n(X^n) = 0 \Leftrightarrow f_n(\lambda_0 + \lambda_3X^3 + \cdots + \lambda_nX^n) = 0.$$

Donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda_0 + \lambda_3X^3 + \cdots + \lambda_nX^n = \alpha X + \beta(1 + X^2)$$

et donc $\lambda_0 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$. D'où $(f_n(1), f_n(X^3), ..., f_n(X^n))$ est une base de $\operatorname{Im}(f_n)$.

11. D'après ce qui précède, la matrice de f_n dans la base canonique est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux : $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ pour $0 \leq k \leq n$.
On trouve deux fois 0, avec P_1, P_2 pour vecteurs propres donc $\dim(\ker(f_n)) = \operatorname{ord}(0)$, deux fois 1 , avec Q_1, Q_2 pour vecteurs propres donc $\dim(\ker(f_n - \operatorname{Id})) = \operatorname{ord}(1)$, enfin $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ avec $k \geq 4$, d'ordre 1 donc le sous-espace propre associé est de dimension 1. Donc f_n est diagonalisable.

12. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan donc $\dim(\ker(\phi_1)) = \dim(\ker(\phi_1)) = n$.
Deux formes linéaires sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau. ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas proportionnelles donc $\ker(\phi_1) \neq \ker(\phi_2)$.
Posons $F_k = \ker(\phi_k)$ pour $k \in \{1, 2\}$, on a $F_k \subset F_1 + F_2$, si on avait $F_1 = F_1 + F_2$ alors $F_2 \subset F_1$ et comme ils ont même dimension, on aurait $F_2 = F_1$ ce qui est faux. Donc $F_1 \subsetneq F_1 + F_2$, d'où $n = \dim(F_1) < \dim(F_1 + F_2)$. $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$ donc $\dim(F_1 + F_2) \leq n + 1$, d'où $\dim(F_1 + F_2) = n + 1$.
De plus

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) = 2n - \dim(F_1 \cap F_2).$$

Par conséquent, $\dim(\ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)) = n - 1$.

13. (a) Si $Q = f_n(P)$ alors
$$Q'(X) = \frac{1}{2}(X^2-1)P^{(3)}(X) + XP''(X) - XP''(X) - P'(X) + P'(X) = \frac{1}{2}(X^2-1)P^{(3)}(X).$$
(b) Notons ϕ_1 et ϕ_2 les formes linéaires définies par : $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\phi_1(P) = P'(1)$ et $\phi_2(P) = P'(-1)$. On a $\mathrm{Im}(f_n) \subset \ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)$, ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas proportionnelles donc
$$\dim(\ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)) = n - 1 = \dim(\mathrm{Im}(f_n)).$$
D'où l'équivalence
$$Q \in \mathrm{Im}(f_n) \Leftrightarrow Q'(1) = Q'(-1) = 0.$$

14. • On a $Q(X) = f_n(P)(X) = \dfrac{X^2-1}{2}P''(X) + (-1)XP'(X) + P(X)$, donc $\alpha_0 = -1$ et $\beta_0 = 1$.
• On a aussi $Q'(X) = \dfrac{X^2-1}{2}P^{(3)}(X)$, donc $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
• Dérivons cette relation à l'ordre $k-1$ en utilisant la formule de Leibniz :
$$Q^{(k)} = \frac{X^2-1}{2}P^{(3+k-1)} + C_{k-1}^1 XP^{(3+k-2)} + C_{k-1}^2 P^{(3+k-3)}.$$
Donc $\alpha_k = (k-1)$ et $\beta_k = \dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$.

Quatrième partie

15. Par identification des termes de plus haut degré de $f_n(S)$ et λS on obtient :
$$\lambda = \frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

16. (a) Si $p \in \{0, 3\}$, on trouve $\lambda = 1$ et si $p \in \{1, 2\}$ on trouve $\lambda = 0$.
(b) On se retrouve dans $\mathbb{C}_3[X]$, d'où les polynômes propres de degré au plus 3 sont : $1, X, 1+X^2, -3X+X^3$ (à une constante multiplicative près) .

17. (a) Si $p \geq 4$ alors $\dfrac{(p-1)(p-2)}{2} \geq 3 > 1$.
(b) On a :
$$f_n(S) = \lambda S \;\Leftrightarrow\; \frac{X^2-1}{2}S''(X) - XS'(X) = (\lambda - 1)S(X)$$
et $\lambda \neq 0$ donc $S = f_n\left(\dfrac{1}{\lambda}S\right) \Rightarrow S \in \mathrm{Im}(f_n) \Rightarrow S'(1) = 0 \Rightarrow (\lambda-1)S(1) = 0 \Rightarrow S(1) = 0$, car $\lambda \neq 1$.
(c) D'après la troisième partie, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{X^2-1}{2}S^{(k+2)}(X) + (k-1)XS^{(k+1)}(X) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}S^{(k)}(X) = \lambda S^k(X).$$
D'où pour $X = 1$, $(k-1)S^{(k+1)}(1) = \left[\lambda - \dfrac{(k-1)(k-2)}{2}\right]S^{(k)}(1)$. Si on avait $S''(1) = 0$ alors : $S^{(3)}(1) = 0$ et par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\quad S^{(n)}(1) = 0$.
(d) D'après la formule de Taylor, on a :
$$S(X) = \sum_{n=0}^{\deg(S)} \frac{S^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n,$$
donc $S = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $S''(1) \neq 0$. 1 est donc racine d'ordre 2 de S. On peut faire le même raisonnement pour -1, donc -1 est racine d'ordre 2 de S.

(e) Si $\deg(S) = 4$ alors sachant que S est divisible par $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$, on a $S(X) = \alpha(X^2-1)^2$.

18. (a) On a $f_n(S)(-X) = \lambda S(-X)$, d'où :

$$\frac{X^2-1}{2}S''(-X) + XS'(-X) + S(-X) = \lambda S(-X).$$

Par ailleurs $T(X) = S(-X) \Rightarrow T'(X) = -S'(-X)$ et $T''(X) = S''(-X)$, d'où :

$$\frac{X^2-1}{2}T''(X) - XT'(X) + T(X) = \lambda T(X),$$

c'est à dire

$$f_n(T) = \lambda T.$$

(b) Pour $p \geq 5$, λ est valeur propre simple donc le sous-espace propre associé est de dimension 1, donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $T = \alpha S$. Si on pose $S(X) = a_p X^p + \cdots + a_0$ alors $T(X) = (-1)^p\, a_p X^p + \cdots + a_0$. On a donc

$$S(-X) = (-1)^p S(X).$$

(c) Si p est pair : $S(-X) = S(X)$ donc S est un polynôme pair.

(d) Si p est impair, $S(0) = -S(0) = 0$

(e) Si $p = 5$, alors S admet 1 et -1 pour racines doubles et 0 pour racine simple. Donc

$$S(X) = \alpha X(1-X^2)^2$$

car S est un polynôme de degré 5.

19. On a toujours :

$$\frac{X^2-1}{2}S^{(k+2)}(X) + (k-1)XS^{(k+1)}(X) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}S^{(k)}(X) = \lambda S^k(X).$$

Soit x_0 une racine de S différent de 1 et de -1. Si $S'(x_0)$ était nul, alors pour $k = 0$ et $X = x_0$ on aurait $S''(x_0) = 0$, pour $k = 1$ on a $S^{(3)}(x_0) = 0$ et par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S^{(n)}(x_0) = 0.$$

D'où $S = 0$ ce qui est faux. Donc $S'(x_0) \neq 0$ et x_0 est racine simple de S.

• • • • • • • • • • •