Devoir surveillé $n°1$
Correction

Exercice

1. Pour 1, il suffit de poser $P(X) = X - 1$. Pour $\sqrt{2}$, on peut considérer $P(X) = X^2 - 2$.
Pour $\alpha = \sqrt{2} - 4\sqrt{3}$, on écrit que $\alpha^2 = 2 - 8\sqrt{6} + 48 = 50 - 8\sqrt{6}$. Ainsi $\alpha^2 - 50 = 8 - \sqrt{6}$, et en élevant cette égalité au carré on trouve $(\alpha^2 - 50)^2 = 6 \times 64 = 384$, ce qui montre, après développement, que le polynôme $P(X) = X^4 - 100X^2 + 2116$ est un polynôme annulateur de α coefficients entiers, donc α est bien algébrique.
Soit $r = \dfrac{a}{b}$, $a \in Z$, $b \in \mathbb{N}^*$ un nombre rationnel. On pose $P(X) = bX - a$, qui est bien à coefficients entiers ; comme $P(r) = b \times \dfrac{a}{b} - a = 0$, r est donc algébrique.

2. Si a est algébrique, il existe un polynôme P à coefficients entiers tel que $P(a) = 0$. Écrivons :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

où $d = \deg(P)$. Considérons alors le polynôme Q défini ainsi :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k a_k X^k$$

Il est clair que Q est encore à coefficients entiers et que :

$$Q(-a) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k a_k (-a)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k a^k = 0.$$

ce qui prouve que $-a$ est algébrique, et donne un polynôme annulateur pour $-a$.
Si a est maintenant supposé non nul, on peut considérer son inverse $\dfrac{1}{a}$. Considérons le polynôme R défini ainsi :

$$R(X) = X^d \sum_{k=0}^{d} a_k X^{-k} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{d-k}.$$

R est encore à coefficients entiers et on a :

$$R\left(\frac{1}{a}\right) = a^d \sum_{k=0}^{d} a_k a^k = a^d P(a) = 0.$$

ce qui prouve que $\dfrac{1}{a}$ est algébrique et fournit un polynôme annulateur pour $\dfrac{1}{a}$.

3. Supposons a algébrique ; alors, par définition, il existe un polynôme P à coefficients entiers annulant a. Comme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, P est en particulier à coefficients rationnels ; d'où la première implication.
Dans l'autre sens, supposons qu'il existe un polynôme P à coefficients rationnels tel que $P(a)$ soit égal à 0. Posons

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

et appelons A le produit des dénominateurs des a_k non nuls. Alors il est clair que le polynôme $AP(X)$ est à coefficients entiers et annule a, qui est donc algébrique. D'où l'équivalence demandée.

4. Montrons que I_a est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire que c'est un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}[X]$ stable par multiplication par tout élément de Q[X].
Si P et Q appartiennent à I_a, alors $P+Q$ aussi puisque $(P+Q)(a) = P(a)+Q(a) = 0+0 = 0$. D'autre part, si Q est un polynôme quelconque de $\mathbb{Q}[X]$, QP appartient encore à I_a car $(QP)(a) = Q(a)P(a) = 0$ car $P(a) = 0$.
Ainsi I_a est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$, il est réduit à $\{0\}$ si et seulement si le seul polynôme à coefficients rationnels annulant a est le polynôme nul, c'est-à-dire si et seulement si a est transcendant.

5. Comme $\mathbb{Q}$ est un corps et I_a est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ non réduit à $\{0\}$ (car a est algébrique), alors d'après le cours il existe un unique polynôme unitaire π_a, de degré minimal, annulant a tel que

$$I_a = (\pi_a) = \{Q\pi_a / Q \in \mathbb{Q}[X]\}.$$

6. Supposons par l'absurde π_a non irréductible, et considérons $\pi_a = QR$ une factorisation de π_a comme produit de deux polynômes à coefficients rationnels non constants. Alors le polynôme Q, de degré strictement plus petit que π_a, annule a, c'est donc un multiple de π_a, mais par un argument de degré cela n'est pas possible. Ainsi π_a est irréductible.
Pour trouver le polynôme minimal de $\alpha = 1+\sqrt{2}$, on commence par observer que

$$\alpha^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 1 + 2\alpha$$

donc que le polynôme $X^2 - 2X - 1$ annule α. C'est le polynôme minimal de $1+\sqrt{2}$ puisqu'il est de degré deux, et que $1+\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

7. Il suffit de vérifier que $\mathbb{Q}[a]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$).
Comme $0 \in \mathbb{Q}[a]$, $\mathbb{Q}[a]$ est non vide. Si $x = P(a)$ et $y = Q(a)$ sont deux éléments de $\mathbb{Q}[a]$, leur somme $x+y = (P+Q)(a)$ appartient à $\mathbb{Q}[a]$, enfin, si $r \in \mathbb{Q}$, $rx = rP(a) = (rP)(a)$ est encore dans $Q[a]$.
Ainsi $\mathbb{Q}[a]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

8. Si a est algébrique, alors il possède un polynôme minimal π_a de degré d, il est clair que $\{1, a, a^2, ..., a^{d-1}\}$ est libre dans $\mathbb{Q}[a]$, car une relation de type $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a^i$, avec les λ_i non tous nuls, donnerait un polynôme annulateur non nul $P = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X^i$et de degré strictement inférieur à celui de π_a. De plus cette famille engendre $\mathbb{Q}[a]$, en effet si $b \in \mathbb{Q}[a]$, alors il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $b = P(a)$, la division euclidienne de P par π_a s'écrit :

$$P = Q\pi_a + R \text{ avec } R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg \pi_a.$$

ce qui entraîne bien $b = R(a) \in \mathrm{Vect}\{1, a, a^2, ..., a^{d-1}\}$. Ainsi $\mathbb{Q}[a] = \mathrm{Vect}(1, a, a^2, ..., a^{d-1})$ est de dimension finie d sur $\mathbb{Q}$.
Réciproquement, si $\mathbb{Q}[a]$ est de dimension finie n, les $n+1$ éléments $1, a, ..., a^n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}[a]$, puisque c'est une famille de cardinal strictement plus grand que n. Ceci nous donne une relation du type

$$\sum_{j=0}^{n} \mu_j a^j = 0$$

avec les μ_j dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire un polynôme annulateur à coefficients rationnels pour a, qui est donc algébrique.

9. On peut vérifier facilement, comme dans la question précédente que $\mathbb{Q}[a]$ est stable aussi par multiplication, donc $\mathbb{Q}[a]$ est un sous-anneau de$\mathbb{R}, +, .)$. Il reste donc à vérifier la stabilité par inverse : soit $x \in \mathbb{Q}[a] \setminus \{0\}$. Donc il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul de degré strictement inférieur à d tel que $x = P(a)$. Comme π_a est irréductible et P est de degré strictement inférieur à celui de π_a, on a P etP_a premiers entre-eux et on peut donc appliquer le théorème de Bezout : il existe des polynômes $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$PU + \pi_a V = 1.$$

Ainsi, $P(a)U(a)+\pi_a(a)V(a)=1$ et $xU(a)=1$. D'où x est inversible dans $\mathbb{Q}[a]$ et $x^{-1}=U(a)\in\mathbb{Q}[a]$. $\mathbb{Q}[a]$ est donc un corps.

10. Dans ce cas $\pi_a=X^2+bX+c$ avec $b,c\in\mathbb{Q}$. Comme $a\in\mathbb{R}$ et π_a irréductible, le discriminant $\Delta=b^2-4c\in\mathbb{Q}$ est strictement positif. Soit $\delta=\sqrt{\Delta}$, alors $a=\dfrac{-b\pm\delta}{2}$ et donc $\mathbb{Q}[a]\subset\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$. De même $\delta=\pm(2a+b)$ donc $Q[\sqrt{\delta}]\subset\mathbb{Q}[a]$.

Problème

Partie I.

1. On vérifier facilement que $\forall P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$, de plus $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$, donc φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme.

2. Notons $\mathscr{B}=(1,X,...,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On a $\varphi(1)=1$ et $\forall i\geqslant 1$, $\varphi(X^i)=X^i-iX^{i-1}$, d'où la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_n)=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&\cdots&0\\0&1&-2&\ddots&&\vdots\\\vdots&0&1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&0&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&-n\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

3. À l'aide de la matrice de φ_n, on trouve que $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\varphi_n)=1\neq 0$, ainsi φ_n est un automorphisme de l'espace de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. φ_n étant une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, il existe une unique famille de polynômes $s_0,s_1,\cdots,s_n$ telle que $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $\varphi_n(s_i)=\dfrac{X^i}{i!}$. ${\varphi_n}^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\left(1,\dfrac{X}{1!},\cdots,\dfrac{X^n}{n!}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $(s_0,s_1,\cdots,s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On a

$$(id-\delta)\circ(id+\delta+\cdots+\delta^n)=(id+\delta+\cdots+\delta^n)-(\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n+1})=id-\delta^{n+1}.$$

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Par récurrence immédiate, on a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\deg\left(\delta^k(P)\right)\leq\deg P-k$, donc $\deg\left(\delta^{n+1}(P)\right)\leq -1$ et ainsi $\left(\delta^{n+1}(P)\right)=0$. On a donc bien

$$(id-\delta)\circ(id+\delta+\cdots+\delta^n)=id.$$

6. On déduit de la question précédente que $\varphi_n\circ(id+\delta+\cdots+\delta^n)=id$. Comme φ_n est endomorphisme d'un espace de dimension finie alors $\varphi_n^{-1}=id+\delta+\cdots+\delta^n$. Donc pour i dans $[\![0,n]\!]$, on a :

$$s_i=\varphi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)=(id+\delta+\cdots+\delta^n)\left(\frac{X^i}{i!}\right)=(id+\delta+\cdots+\delta^i)\left(\frac{X^i}{i!}\right).$$

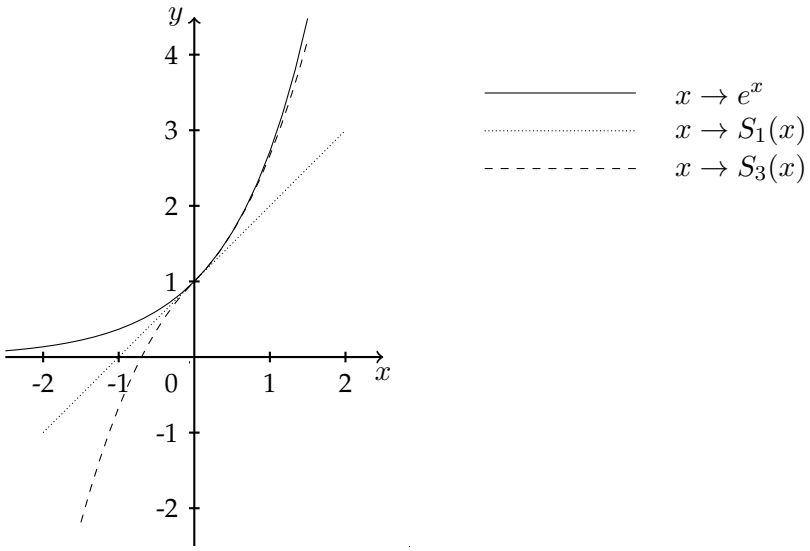
On en déduit

$$s_i=1+\frac{X}{1!}+\cdots\frac{X^i}{i!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{X^j}{j!}.$$

Partie II.

7. $\forall x\in\mathbb{R}$, $S_3'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{2}\left((x+1)^2+1\right)>0$. On en déduit le tableau de variations de S_3 :

x	$-\infty$	α_3	$+\infty$
$S_3'(x)$		$+$	
$S_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$



8. On remarque que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n' = S_{n-1}$. On voit bien S_0 n'a pas de racines réelles et que S_1 admet 1 comme unique racine réelle. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et supposons que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. La propriété est vraie si $n = 0$ et $n = 1$

• **Si** $n+1$ **est impair :** $S_{n+1}' = S_n$, d'après l'hypothèse de récurrence, S_n n'a pas de racine réelle et $S_n(0) = 1$, donc S_n est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

On en déduit son tableau de variations :

x	$-\infty$	α_{n+1}	$+\infty$
$S_{n+1}'(x)$		$+$	
$S_{n+1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

Donc S_{n+1} possède donc une unique racine réelle simple.

• **Si** $n+1$ **est pair :** $S_{n+1}' = S_n$, d'après l'hypothèse de récurrence, S_n possède une unique racine réelle simple α_n et $S_{n+1}(\alpha_n) = S_n(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n}{n!} = \dfrac{{\alpha_n}^{n+1}}{(n+1)!} > 0$.

On en déduit son tableau de variations :

x	$-\infty$	α_n	$+\infty$
$S_{n+1}'(x)$	$-$	0	$+$
$S_{n+1}(x)$	$+\infty \searrow$	$S_{n+1}(\alpha_n) > 0$	$\nearrow +\infty$

Donc S_{n+1} ne possède donc aucune racine réelle.

D'où, d'après le principe de récurrence, le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair.

9. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) &= S_{2n-1}(\alpha_{2n-1}) + \frac{{\alpha_{2n-1}}^{2n}}{(2n)!} + \frac{{\alpha_{2n-1}}^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{{\alpha_{2n-1}}^{2n}}{(2n)!} + \frac{{\alpha_{2n-1}}^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{{\alpha_{2n-1}}^{2n}}{(2n)!}\left(1 + \frac{\alpha_{2n-1}}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$, donc $|\alpha_{2n-1}| < 2n-1$, d'où l'on déduit $1 + \dfrac{\alpha_{2n-1}}{2n+1} > 0$ et $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) > 0$.

La fonction S_{2n+1} est strictement croissante, $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) > 0 = S_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) = 0$. On a donc $\alpha_{2n-1} > \alpha_{2n+1}$ et donc la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) i. La suite (v_m) est convergente, donc elle est bornée et il existe un réel $a > 0$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}$, $|v_m| \leqslant a$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^k}{k!}$ converge, donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier naturel M tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\right| < \varepsilon.$$

Soit $m > M$,

$$|S_m(v_m) - e^{v_m}| = \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{{v_m}^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|v_m|^k}{k!} \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} < \varepsilon.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier naturel M tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon.$$

ii. On vient de montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon,$$

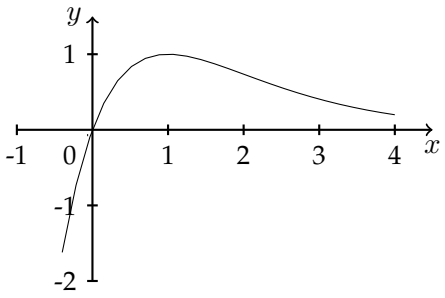
ce qui signifie : $S_m(v_m) - e^{v_m} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme exp est continue, on a $e^{v_m} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^l$. Par somme $S_m(v_m) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^l$. On en déduit que la suite $(S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^l.

(c) La suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, elle admet donc une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Par l'absurde, si $l \neq -\infty$, la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ serait convergente vers l. Donc $(S_{2n+1}((\alpha_{2n+1})))_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers $e^l > 0$ d'après (b). Or il s'agit de la suite identiquement nulle, ce qui absurde. On en déduit que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

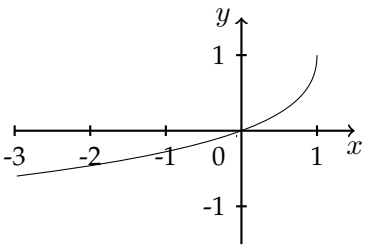
Partie III.

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = (1-x)e^{1-x}$. On en déduit le tableau de variations et le graphe de h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0



11. D'après l'étude précédente, la fonction h est bijective de $]-\infty,1[$ sur $]-\infty,1[$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et h' ne s'annule pas.
Soit g la bijection réciproque. g est donc bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $]-\infty,1[$ dans $]-\infty,1[$ et $\forall x \in]-\infty,1[,\ h(g(x)) = x$.
Graphe de g :



12. Comme h induit une bijection de $]-\infty,1[$ vers $]-\infty,1[$, il existe un unique $\rho \in]-\infty,1[$ tel que $h(\rho) = -1$. De plus $\forall x \geq 1$, $h(x) > 0$ ainsi il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.

13. On a $h(-\frac{1}{2}) = -\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$, donc $\ln(-h(-\frac{1}{2})) = \frac{3}{2} - \ln(2) > 1 - \ln(2) > 0$ car $2 \leq e$, donc $-h(-\frac{1}{2}) > 1$ d'où $h(-\frac{1}{2}) < -1 = h(\rho)$. Comme h est strictement croissante sur $]-\infty,1[$,alors $-\frac{1}{2} < \rho$. D'autre part $h(-\frac{1}{4}) = -\frac{e^{\frac{5}{4}}}{4}$, donc $\ln(-h(-1s4)) = \frac{5}{4} - 2\ln(2) \leq \frac{5}{4} - \frac{26}{20} = -\frac{1}{20} < 0$, car $\ln 2 \geq \frac{13}{20}$, donc $h(-\frac{1}{4}) > h(\rho)$.
On a bien ρ dans l'intervalle $]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$.

14. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leqslant 1$ et $|ze^{1-z}| \leqslant 1$. Soit n un entier naturel.

(a) On a :

$$\begin{aligned}(ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} &= e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k z^k}{k!} \\ &= e^{-nz} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k z^k}{k!} \right) \\ &= e^{-nz} \left(e^{nz} - T_n(z) \right) \\ &= 1 - e^{-nz} T_n(z)\end{aligned}$$

On a bien l'égalité :

$$1 - e^{-nz} T_n(z) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|1-e^{-nz}T_n(z)\right| &= \left|(ze^{1-z})^n e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^{k-n}\right| \\ &\leqslant \left|(ze^{1-z})\right|^n e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}|z|^{k-n} \\ &\leqslant e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}\end{aligned}$$

car $|z|\leqslant 1$ et $|ze^{1-z}|\leqslant 1$.
Or

$$e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}=e^{-n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right)=e^{-n}\left(e^n-T_n(1)\right)=1-e^{-n}T_n(1).$$

et donc

$$\left|1-e^{-nz}T_n(z)\right|\leqslant 1-e^{-n}T_n(1).$$

(c) Si $T_n(z)=0$, alors $1\leqslant 1-e^{-n}T_n(1)$ et donc $e^{-n}T_n(1)\leqslant 0$, ce qui est impossible car $e^{-n}>0$ et $T_n(1)>0$. On a donc $T_n(z)\neq 0$.

15. Soit n un entier naturel impair $\geqslant 3$.
Dans les questions précédentes, on a montré que si z est un nombre complexe tel que $|z|\leqslant 1$ et $|ze^{1-z}|\leqslant 1$, alors $T_n(z)\neq 0$.
D'autre part, $T_n\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)=S_n(\alpha_n)=0$. On a donc $\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|>1$ ou $\left|\frac{\alpha_n}{n}e^{1-\frac{\alpha_n}{n}}\right|>1$.
On a admis que toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $<n$, donc $\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|<1$ et par conséquent on a $\left|\frac{\alpha_n}{n}e^{1-\frac{\alpha_n}{n}}\right|>1$, c'est à dire $\left|h\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right|>1$.
D'après les variations de la fonction h, on a donc $\frac{\alpha_n}{n}<\rho$ et comme $|\alpha_n|<n$, α_n est bien dans l'intervalle $]-n,n\rho[$.

Partie IV.

16. La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n. Soit $u\in\mathbb{R}$. On a :

$$\exp(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp^{(k)}(-u)}{k!}(0+u)^k+\int_{-u}^{0}\frac{(0-t)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $1=e^{-u}\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}+\int_{-u}^{0}\frac{(-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t$

On effectue dans l'intégrale le changement de variable$x=-t$, ainsi $1=e^{-u}S_n(u)-\int_u^0\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}t$ d'où

$$e^{-u}S_n(u)=1+\frac{1}{n!}\int_u^0 t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

17. En utilisant la question précédente en $u=\alpha_n$, on a : $0=1+\frac{1}{n!}\int_{\alpha_n}^0 x^n e^{-x}\mathrm{d}x$. Comme $\frac{\alpha_n}{n}=\gamma_n$, on effectue le changement de variable $nt=x$, donc $n\frac{1}{n!}\int_{\gamma_n}^0(nt)^n e^{-nt}\mathrm{d}t=-1$ et ainsi $-1=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_{\gamma_n}^0\left(te^{-t}\right)^n\mathrm{d}t$ d'où

$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n dt=-\frac{n!e^n}{n^{n+1}}.$$

18. Quand $m \longrightarrow +\infty$, on pose $n = 2m+1$ et $n \longrightarrow +\infty$ et Stirling nous dit que : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc $\int_{\gamma_n}^{0} h(t)^n dt \sim -\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ et $-\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \longrightarrow 0$.

D'où la suite $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1} dt\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

19. Pour $t \in]-\infty, 0]$, $h(t) \leq 0$ donc $h(t)^{2m+1} \leq 0$ et $\gamma_{2m+1} \leq \rho \leq 0$ (voir 16 et 14). Ainsi les trois intégrales de la relation de Chasles sont négatives :

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t = \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t + \int_{\rho}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t.$$

D'où $\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t \leq \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t \leq 0$

Ainsi selon le théorème des gendarmes, la suite $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, selon 19.

20. Comme h est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, on a $\forall t \leq \rho,\ h(t) \leq -1$ et $h(t)^{2m+1} \leq -1$. Donc pour $m \geq 1$, comme on a $\gamma_{2m+1} \leq \rho$ on a $\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t \leq (\rho - \gamma_{2m+1}) \times (-1)$. Donc :

$$0 \leq \rho - \gamma_{2m+1} \leq -\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t.$$

Alors avec les gendarmes : $\gamma_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \rho$, selon 20. D'où $\frac{\alpha_{2m+1}}{(2m+1)} \underset{m\to+\infty}{\sim} \rho$, donc $\alpha_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} (2m+1)\rho$ et par conséquent :

$$\alpha_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} 2m\rho.$$

•••••••