Devoir surveillé $n°2$
Correction

Exercice 1

1. Posons $b(.,.) = (.|.)$. Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} b(f+\lambda g, h) &= (f+\lambda g)(0)h(0) + \int_0^1 (f+\lambda g)'(t)h'(t)\mathrm{d}t \\ &= f(0)h(0) + g(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t) + \lambda g'(t)h'(t)\mathrm{d}t \\ &= f(0)h(0) + \lambda g(0) + h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^1 g'(t)h'(t)\mathrm{d}t \\ &= f(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t)\mathrm{d}t + \lambda g(0)h(0) + \int_0^1 g'(t)h'(t)\mathrm{d}t = b(f,h) + \lambda b(g,h) \end{aligned}$$

De plus b est symétrique puis que

$$b(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t = g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t)\mathrm{d}t = b(g,f)$$

et donc b est bien une forme bilinéaire symétrique et positive puisque $b(f,f) \geq 0$.
Montrons que b est définie positive, en effet, soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ tel que :

$$b(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t = 0.$$

Comme les deux termes sont positifs, $b(f,f) = 0$ si et seulement si $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t = 0$. Comme $f'(t)^2 \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et f' est continue sur $[0,1]$, l'intégral vaut 0 si et seulement si $f'(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi f est constante mais comme $f(0) = 0$, on obtient que f est la fonction nulle.

2. On peut vérifier facilement que l'application $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E. Soit $f \in E$ la fonction définie par $f(t) = 1$. En appliquant Cauchy-Schwarz à $(f, |g|)$ on obtient

$$\int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 1^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ au couples $(1,1)$ et (a,b) :

$$a + b = 1 \times a + 1 \times b \leq \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

4. Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$. Donc

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$$

D'après les questions 2. et 3., on peut déduire l'inégalité :

$$|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \sqrt{2}\left(f(0)^2 + \int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$|f(x)| \leq \sqrt{2}\|f\|$$
et donc
$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\sin(n\pi t)| = 1 = f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ et
$$\|f_n\|^2 = f_n(0)^2 + \int_0^1 \left(f_n'(t)\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 (n\pi)^2\cos^2(n\pi t)\mathrm{d}t = \frac{(n\pi)^2}{2}$$
et donc $\|f_n\| = \dfrac{n\pi}{\sqrt{2}}$. Ainsi la suite $\left(\dfrac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée et donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

1. (a) La matrice A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Ce sont 1, 2 et 4. La matrice A d'ordre 3 admet 3 valeurs propres réelles, elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(b) On peut écrire $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $D_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\frac{1}{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{\frac{1}{p}} \end{pmatrix}$. Alors $B = PD_pP^{-1}$ vérifie $A = B^p$.

2. Montrons qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Par l'absurde si $B^2 = A$, alors $AB = BA = B^3$. La matrice A est diagonale avec deux éléments distincts. L'égalité $AB = BA$ montre qu'alors B est aussi diagonale et $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi $B^2 = A$ entraîne $b^2 = -2$ qui n'a pas de solutions réelles.

3. Soit q l'ordre de nilpotence de N, soit $N^q = 0$ et $N^{q-1} \neq 0$. Ainsi, il existe un vecteur x non nul tel que $N^{q-1}(x) \neq 0$ et on montre (classiquement) que la famille $(x, N(x), ..., N^{q-1}(x))$ est libre. Son cardinal q vérifie donc $q \leq n$ et $N^n = 0$.
Supposons maintenant que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B telle que $B^p = N$. Alors $B^{pq} = N^q = 0$ et d'après ce qui précède $pq \leq n$, ce qui est impossible pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

4. (a) Une matrice nilpotente N n'admet comme valeur propre que 0, donc $A = I_n + N$ admet comme unique valeur propre 1, en effet, soit λ une valeur propre de A, donc il existe X non nul tel que $AX = \lambda X$ ou encore $NX = (\lambda - 1)X$ et donc $\lambda = 1$.
La matrice A ne peut donc pas être diagonalisable car sinon elle serait semblable (donc égale) à I_n et N serait nulle.

(b) Par la division euclidienne il existe Q et R des polynômes tels que :
$$V(X) = X^qQ(X) + R(X)$$
où $R = 0$ ou $\deg(R) < q$. Donc $\forall x \neq 0$, on a
$$\frac{V(x)}{x^q} = Q(x) + \frac{R(x)}{x^q}$$
Par hypothèse, au voisinage de 0, le polynôme V vérifie $V(x) = o(x^q)$. Donc nécessairement $Q(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R(x)}{x^q} = 0$, ce qui exige que $R = 0$. Donc $V(X) = X^qQ(X)$.

(c) Le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{p}}$ au voisinage de 0 à l'ordre q est de la forme :
$$(1+x)^{\frac{1}{p}} = 1 + a_1x + ... + a_qx^q + o(x^q) = P_q(x) + o(x^q)$$
En élevant à la puissance p, et en développant la puissance, il vient :
$$1 + x = (P_q(x) + o(x^q))^p = U_p(x) + o(x^q)$$

(d) Par les questions précédentes $1+X=U_p(X)+X^qQ(X)$. Soient q l'indice de nilpotence de N et $p\in\mathbb{N}^*$. En remplaçant formellement la dernière équation par la matrice N, il vient :

$$I_n+N=U_p(N)+N^qQ(N)=U_p(N)=(U(N))^p.$$

Problème

A. Éléments spectraux de J

1. Un calcul simple conduit à $\chi_J(X)=X^n-1$. Le polynôme caractéristique de J est donc scindé à racines simples, donc J est diagonalisable en tant qu'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$, pour qui elle soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il faut et il suffit que son spectre soit réel, ou encore que $n=2$.

2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $J^n-I_n=0$, donc J est inversible et $J^{-1}=J^{n-1}={}^tJ$.

3. Le $\mathbb{C}$-algèbre engendré par J est $\underset{k\geq 0}{\mathrm{Vect}}(J^k)$. Comme $J^n=I_n$, alors $\mathbb{C}[J]=\mathrm{Vect}(I,J,J^2,...,J^{n-1})$, de plus on peut vérifier que le polynôme minimal de J est égal à χ_J, donc la famille $(I,J,J^2,...,J^{n-1})$ est en fait une base de $\mathbb{C}[J]$ et par conséquent $\dim\mathbb{C}[J]=n$.

On remarque que si $A=a_0I_n+a_1J+...+a_{n-1}J^{n-1}\in\mathbb{C}[J]$, alors

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \dots & a_0\end{pmatrix},$$

autrement dit, $\mathbb{C}[J]$ est l'ensemble des matrices circulaires de taille n.

Remarque : Une matrice circulante est une matrice carrée dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire des coefficients. Une matrice circulante de taille n est donc de la forme

$$C=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \dots & a_0\end{pmatrix}$$

où les coefficients ci sont des complexes. Pour alléger les notations, on désigne par $C(a_0,a_1,...,a_{n-1})$ la matrice circulante précédente

En notant

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}=C(0,1,0,...,0),$$

on peut constater que toute matrice circulante est un polynôme en J

$$C(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})=\sum_{j=0}^{n-1}a_jJ^j=P_C(J).$$

4. J étant diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$P^{-1}JP=\mathrm{diag}(1,w,...,w^{n-1})=D(w)$$

où $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. En d'autres termes $J = PD(w)P^{-1}$ et alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$J^k = PD(w)^k P^{-1}$$

et donc

$$M = P\,\mathrm{diag}(p(1), p(w), ..., p(w^{n-1})P^{-1}$$

où $p(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Cela suffit pour déduire que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et que

$$\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} p(w^k).$$

Le polynôme associé à $M(\lambda)$ est $P(X) = \lambda + X + X^2 + ... + X^{n-1} = \lambda - 1 + \dfrac{1-X^n}{1-X}$ si $X \neq 1$. Donc $p(w^k) = \lambda - 1$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $p(1) = n - 1 + \lambda$. D'où :

$$\det[M(\lambda)] = (n - 1 + \lambda)(\lambda - 1)^{n-1}.$$

5. Il est évident que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}[J]$. La matrice U de u dans la base $\mathscr{B} = (I, J, J^2, ..., J^{n-1})$ s'écrit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = (w^{kl})_{0 \leq k,l \leq n-1}.$$

On a $u(I) = \sum_{k=0}^{n-1} J^k$, et alors $u^2(I) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + w^k + ... + w^{k(n-1)}\right) J^k = nI_n$, puisque $1+w^k+...+w^{k(n-1)} = 0$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. De même si $q \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :

$$u(J^q) = I_n + w^q J + w^{2q} J^2 + ... + w^{q(n-1)} J^{n-1},$$

et

$$u^2(J^q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + w^{q+k} + ... + w^{(q+k)(n-1)}\right) J^k.$$

Or, on a $\sum_{j=0}^{n-1} w^{(q+k)j} = 0$ sauf si $q + k = n$, c'est-à-dire si $k = n - q$. Ainsi $u^2(J^q) = nJ^{n-q}$, par conséquent nous avons :

$$U^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & & & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que U^2 est inversible et alors U l'est aussi.
Compte tenu de ce qui précède, il est alors clair que

$$\forall M \in \mathbb{C}[J], \;\; u^4(M) = n^2 M,$$

ce qui veut dire $u^4 = n^2 Id$, donc $U^{-1} = \dfrac{U^3}{n^2}$, ou encore $U^{-1} = \dfrac{\Omega U}{n}$, avec $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & & & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, et alors, il vient $U^{-1} = \dfrac{\overline{U}}{n}$.

$\overline{U}$ désignant la matrice conjuguée de U, c'est-à-dire la matrice $(\overline{w}^{kl})_{0\leq k,l\leq n-1} = w^{(n-1)kl})_{0\leq k,l\leq n-1}$.

Si $z \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u, alors il existe $M \neq 0$ tel que $u(M) = \widehat{M} = zM$, comme $u^4 = n^2 I_d$, on a alors $z^4 = n^2$, ce qui montre que $z \in \{-i\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -\sqrt{n}, \sqrt{n}\}$.

B. Étude de deux éléments de $\mathbb{C}[J]$

6. Ici, on associe à M_1 le polynôme $P_1(X) = 1 + 2X + 3X^2 + ... + nX^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)X^i$. Les valeurs propres de M_1 sont exactement les nombres $P_1(w^k)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Si $Q_1(X) = \sum_{k=1}^{n} X^k$, on a $P_1 = Q'$, et comme pour $X \neq 1$,

$$Q_1(X) = X\frac{1-X^n}{1-X}$$

on a sous les mêmes conditions :

$$P_1(X) = \frac{1-(n+1)X^n + nX^{n+1}}{(1-X)^2}$$

ce qui donne

$$P_1(w^k) = \frac{n}{w^k - 1}, \text{ si } k \neq 0 \text{ et } P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi, on a

$$\widehat{M_1} = \frac{n(n+1)}{2} I_n + n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{J^k}{w^k - 1}$$

et

$$\det M_1 = \frac{n^n(n+1)}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{w^k-1} = \frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(w^k-1)}$$

Or $X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - w^k)$, et alors

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^k) = \lim_{X\to 1}\frac{X^n - 1}{X-1} = n = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(w^k - 1)$$

ce qui donne

$$\det M_1 = (-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

Reste à montrer que $M_1^{-1} \in \mathbb{C}[J]$. Comme M_1 est inversible, $M_1^{-1} \in \mathbb{C}[J]$, en effet, si $a_0 + a_1 X + ... + X^n$ est le polynôme caractéristique de M_1, alors d'après Cayley-Hamilton $a_0 I_n + a_1 M_1 + ... + M_1^n = 0$ et en multipliant par M_1^{-1} (puisque $a_0 \neq 0$), on a $M_1^{-1} \in \mathbb{C}[J]$.

Comme $(1-X)^2P_1(X)=1-(n+1)X^n+nX^{n+1}$, cette égalité entraine en substituant à X la mtarice J, et tenant compte de $J^n=I_n$:

$$(I_n-J)^2M_1=n(J-I_n)$$

On a donc

$$nM_1^{-1}(J-I_n)=J^2-2J+I_n$$

et si on écrit :

$$M_1^{-1}=a_0I_n+a_1J+...+a_{n-1}J^{n-1}$$

on doit avoir :

$$M_1^{-1}(J-I_n)=(a_{n-1}-a_0)I_n+(a_0-a_1)J+(a_1-a_2)J^2+...+(a_{n-2}+a_{n-1})J^{n-1}=\frac{1}{n}(I_n-2J+J^2)$$

ce qui donne

$$a_2=a_3=...=a_{n-1},\ \ a_{n-1}=a_0=\frac{1}{n},\ \ a_0-a_1=\frac{-2}{n}\ \text{ et }\ a_1-a_2=\frac{1}{n}$$

Si $v={}^t(1,1,...,1)$, on a $M_1v=\dfrac{n(n+1)}{2}v$, et alors $M_1^{-1}v=\dfrac{2}{n(n+1)}v=(a_0+a_1+...+a_{n-1})v$. D'où $a_0+a_1+...+a_{n-1}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

Si on pose $\alpha=a_2=...=a_{n-1}$, on a :

$$\begin{cases} a_0+a_1+(n-2)\alpha=\dfrac{2}{n(n+1)},\\ a_0-a_1=-\dfrac{2}{n},\\ \alpha-a_0=\dfrac{1}{n},\\ a_1-\alpha=\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{2}{n^2(n+1)}$, $a_0=\dfrac{2-n(n+1)}{n^2(n+1)}$ et $a_1=\dfrac{2+n(n+1)}{n^2(n+1)}$ ce qui permet d'obtenir :

$$M_1^{-1}=\frac{1}{n^2(n+1)}C(2-n(n+1),2+n(n+1),2,...,2).$$

7. Le polynôme P_2 attaché à M_2 est $P_2(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)X^{i-1}=2\sum_{i=1}^{n}iX^{i-1}-\sum_{i=1}^{n}X^{i-1}$, soit

$$P_2(X)=2\frac{d}{\mathrm{d}X}\left(\frac{X(1-X^n)}{1-X}\right)-\frac{1-X^n}{1-X}$$

e qui donne pour $X\neq 1$:

$$P_2(X)=2\left[nX^{n-1}+\frac{(n-1)X^n-nX^{n+1}+1}{(1-X)^2}\right]-\frac{1-X^n}{1-X}$$

En conséquence pour tout $X\in\mathbb{C}$:

$$(1-X)^2P_2(X)=2\left[nX^{n-1}(1-X)^2+(n-1)X^n-nX^{n+1}+1\right]-(1-X)(1-X^n)$$

et par substitution, on obtient :

$$(J-I_n)^2M_2=2n(J-I_n).$$

Cela permet de montrer que M_2 est inversible, car si $x \in \mathbb{C}^n$ vérifie $M_2x = 0$, alors $Jx = x$, ce qui montre que $x \in \operatorname{Vect}(v)$. Or $M_2v = n^2v$, car $1 + 2 + 3 + ... + 2n - 1 = n^2 \neq 0$, et par suite $M_2v \neq 0$. M_2 est donc inversible.
Comme dans la question précédente, avec les mêmes techniques, on obtient :

$$M_2^{-1} = \frac{1}{2n^3}C(2-n^2, 2+n^2, 2, ..., 2).$$

Enfin, on a $\det(M_2) = P_2(1)P_2(w)...P_2(w^{n-1})$ avec $P_1(1) = n^2$ et $P(w^k) = \dfrac{2n}{w^k - 1}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\det(M_2) = (-1)^{n-1}n^n2^{n-1}.$$

C. Étude de la suite $(M_k)_{k\geq 1}$ où M est une matrice circulaire à coefficients strictement positifs

8. Le point d'affixe $p(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ représente le barycentre du système des n points pondérés

$$(A_0(1), a_0), (A_1(z), a_1), ..., (A_{n-1}(z_{n-1}), a_{n-1}).$$

Comme tous les a_k sont strictement positifs, le point n'est pas sur le cercle unité que si tous les points $1, z, ..., z^{n-1}$ sont confondus et égaux à 1, c'est-à-dire $z = 1$. Donc nécessairement $|p(z)| < 1$.
Comme M est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}MP = \operatorname{diag}\left(1, p(w), ..., p(w^{n-1})\right)$$

où $p(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Donc

$$M^k = P \operatorname{diag}\left(1, p(w)^k, ..., p(w^{n-1})\right)^k P^{-1}$$

Comme $|p(w^j)| < 1$ pour $j = 1, 2, ..., n-1$, alors $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left[p(w^j)\right]^k = 0$, donc $\displaystyle\lim_{k\to\infty} M^k = P \operatorname{diag}(1, 0, ..., 0)P^{-1}$
Comme $M \in \mathbb{C}[J]$, $M^k \in \mathbb{C}[J]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Si nous notons

$$M^k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(k)J^j$$

avec $a_j(1) = a_j$ pour tout $j \in [0, n-1]$, on a pour tout entier k :

$$a_0(k) + a_1(k) + ... + a_{n-1}(k) = 1$$

En effet, si

$$\begin{cases} U = u_0I_n + u_1J + ... + u_{n-1}J^{n-1}, \\ V = v_0I_n + v_1J + ... + v_{n-1}J^{n-1}, \\ W = w_0I_n + w_1J + ... + w_{n-1}J^{n-1}, \end{cases}$$

avec $W = UV$, on a donc :

$$\begin{aligned} Wv &= (w_0 + w_1 + ... + w_{n-1})v \\ &= (UV)v = U((v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})v) \\ &= (v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})U(v) \\ &= (v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})(u_0 + u_1 + ... + u_{n-1})v \end{aligned}$$

Tout cela pour dire que

$$\sum_{j=0}^{n-1} w_j = \left(\sum_{j=0}^{n-1} u_j\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} v_j\right)$$

Donc on peut conclure que, pour tout $k \geq 1$, on a :

$$a_0(k) + a_1(k) + ... + a_{n-1}(k) = (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1})^n = 1.$$

Comme de plus, chaque $(a_i(k))_{k\geq 1}$ converge vers un réel $l_i \geq 0$ (chaque $a_i(k) > 0$), et que la matrice $P\,\mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)P^{-1}$ est de rang 1, la limite de la suite $(M^k)_{k\geq 1}$ est donc une matrice de rang 1, circulante, et stochastique, d'où :

$$\lim_{k\to\infty} M^k = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

9. Posons, dans le cas général où $a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} > 0$, $\mu = a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}$. On a $M = \mu\dfrac{M}{\mu}$ et $M^k = \mu^k\left(\dfrac{M}{\mu}\right)^k$ Comme $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{M}{\mu}\right)^k = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et donc $M^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mu^k}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Autrement dit :

- si $0 < \mu < 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} M^k = 0$
- si $\mu > 1$, la suite $(M^k)_{k\geq 1}$ ne converge pas
- si $\mu = 1$, la suite $(M^k)_{k\geq 1}$ converge vers $\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

•••••••••••