Devoir surveillé $n^\circ 3$
Correction

Exercice I

1. • Soit f et g de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$[K(f+\lambda g)](x) = \int_0^x (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = [K(f)](x) + \lambda[K(g)](x).$$

D'où $K(f+\lambda g) = K(f) + \lambda K(g)$.

• $\forall f \in E$, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$ (car elle est dérivable sur $[0,1]$), donc $K(f) \in E$. Ainsi l'application K est un endomorphisme de E.

• Pour tout $x \in [0,1]$, $|[K(f)](x)| \leq \displaystyle\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty$. D'où

$$\|K(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |[K(f)](x)| \leq \|f\|_\infty.$$

Donc l'application linéaire K est continue sur $(E, \|.\|_\infty)$.

2. Si f est continue sur $[0,1]$, $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Supposons maintenant que $K^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$, alors $x \mapsto K^{n+1}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x K^n(f)(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,1]$ (la fonction sous signe intégral est de classe $\mathscr{C}^n$). On conclut donc avec le principe de récurrence que $K^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$.

Donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in [0,1],\ \ [K^n(f)](x) = \sum_{k=0}^{n-1} [K^n(f)]^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}[K^n(f)]^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$

D'autre part, on a $[K^n(f)]' = [K(K^{n-1}(f))]' = K^{n-1}(f)$, puis par dérivations successives, on obtient $[K^n(f)](k) = K^{n-k}(f)$ et ceci pour tout entier naturel $k \in \{0,...,n-1\}$.
Il est évident que $[K^n(f)]^{(n)} = K^{n-n}(f) = f$ et $[K^n(f)]^{(k)}(0) = K^{n-k}(f)(0) = 0$ pour $k \in \{0,...,n-1\}$. D'où :

$$\forall x \in [0,1],\ \ [K^n(f)](x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\mathrm{d}t.$$

3. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|[K^n(f)](x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t = \|f\|_\infty \left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_0^x = \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}\|f\|_\infty.$$

Ainsi, $\|K^n\| \leq \dfrac{1}{n!}$.

Si $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $[K^n(f)](x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t = \frac{x^n}{n!}$ et donc $\|K^n(f)\|_\infty = \dfrac{1}{n!}$ et par conséquent $\|K^n\| = \dfrac{1}{n!}$.

4. **EXISTENCE DE L'APPLICATION B :** Si on considére $f - K(f) = g$ comme une équation différentielle en $K(f)$ et si on remarque que $[K(f)](0) = 0$, on a :

$$[K(f)](x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\mathrm{d}t$$

Soit

$$\forall x \in [0,1],\quad f(x) = [K(f)](x) + g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\mathrm{d}t + g(x).$$

Soit donc B l'application définie sur E, par :

$$\forall g \in E,\quad [B(g)](x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\mathrm{d}t.$$

On a $\forall g \in E$ et $\forall x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
(I-K)B(g)(x) &= B(g)(x) - [K(B(g))](x) \\
&= g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \left(g(t) + e^t \int_0^t e^{-u} g(u) \right) \mathrm{d}t \\
&= g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \left(e^t \int_0^t e^{-u} g(u) \right) \mathrm{d}t \\
&= g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t - \left[e^t \int_0^t e^{-u} g(u)\mathrm{d}u \right]_0^x + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Donc $(I-K)B = I$. De même, on montre que $B(I-K) = I$.
CONTINUITÉ DE L'APPLICATION B : Il est clair que l'application est linéaire de E dans E. Montrons qu'elle est continue sur $(E, \|.\|_\infty)$.
Pour tout $g \in E$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$|B(g)(x)| \le |g(x)| + e^x \int_0^x e^{-t} |g(t)|\mathrm{d}t \le \|g\|_\infty + e^1 \|g\|_\infty \int_0^1 \mathrm{d}t \le (1+e)\|g\|_\infty$$

et donc $\|B(g)\|_\infty \le (1+e)\|g\|_\infty$.
Donc B est continue sur E.

5. **<u>Cas $n=1$:</u>** Supposons que $\mathrm{Sp}(K) \neq \varnothing$, soit donc λ une valeur propre de K et $f \in E$ une fonction non nulle telle que

$$K(f) = \lambda f.$$

Si λ est non nulle et puisque $K(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f aussi et donc, par dérivation, $f = \lambda f'$ d'où

$$\forall x \in [0,1],\quad f(x) = c e^{\frac{x}{\lambda}},$$

et comme $f(0) = \dfrac{1}{\lambda} K(f)(0) = 0$, alors f est nulle ce qui est absurde.
Si $\lambda = 0$, alors $\forall x \in [0,1]$, $[K(f)](x) = 0$ puis par dérivation f est nulle sur $[0,1]$, ce qui est absurde.
Par conséquent

$$\mathrm{Sp}(K) = \varnothing.$$

<u>Cas $n \ge 2$:</u> Raisonnons toujours par l'absurde et supposons que $\mathrm{Sp}(K^n) \neq \varnothing$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(K^n)$ et f fonction non nulle telle que

$$(*)\ \ K^n(f) = \lambda f.$$

Si $\lambda \neq 0$, on note $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ les racines *complexes* n-ièmes de λ, donc

$$(*) \Leftrightarrow (K - \mu_1 I) \circ (K - \mu_2 I) \circ ... \circ (K - \mu_n I)(f) = 0.$$

Puisque $K^n - \lambda I$ n'est pas injective (λ est une valeur propre), il existe au moins un indice $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $K - \mu_i I$ n'est pas injective et donc μ_i ce serait une valeur propre de K ce qui est absurde.
Si $\lambda = 0$, alors $K^{n-1} = 0$ et par récurrence descendante $f = 0$ ce qui est absurde.
En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{Sp}(K^n) = \varnothing.$$

Exercice II

1. Il est clair que l'application T est linéaire de E dans E, de plus, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |T(x)(n)| = |x(n+1)| \leq \|x\|_\infty,$$

donc $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$. Ceci montre que l'application linéaire est continue et que $\|T\| \leq 1$. La suite constante $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$ vérifie $\|x\|_\infty = \|T(x)\|_\infty = 1$, donc $\|T\| = 1$.

2. Pour tout suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a(n)x(n)| \leq \|x\|_\infty |a(n)|.$$

Donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a(n)x(n)$ est absolument convergente, donc elle est convergente. Ceci montre que l'application U est bien définie, de plus il est clair qu'elle est linéaire.
Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on a :

$$|U(x)| \leq M\|x\|_\infty,$$

où $M = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a(n)|$. Ceci montre que la forme linéaire U est continue sur E et que $\|U\| \leq M$.
Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a(n) \geq 0 \\ -1 & \text{si } a(n) < 0 \end{cases}$$

On a bien $x \in E$, $\|x\|_\infty = 1$ et $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a(n)| = M$. Donc $\|U\| = 1$.

Problème : Étude de deux normes sur $\mathbb{R}[X]$

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n X^k$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$$

et donc, en passant à la borne supérieure

$$\|P + Q\|_c \leq \|P\|_c + \|Q\|_c.$$

On a clairement $\|\lambda P\|_c = |\lambda|\|P\|$. Enfin, si $\|P\|_c = 0$, alors les coefficients de P sont donc nuls, ce qui entraîne que $P = 0$.
Passons maintenant à $\|P\|_\infty$. On a, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$|(P + Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty.$$

En passant au la borne supérieure, pour $t \in [-1, 1]$, on en déduit que

$$\|P + Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty.$$

Il est clair que $\|\lambda P\|_\infty = |\lambda|\|P\|_\infty$, et si $\|P\|_\infty = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, $\|.\|_\infty$ est également une norme sur E.

2. (a) Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, $\|P\|_c \leq M\|P\|_\infty$. Prenons $P_n = (1 - X^2)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k (-1)^k X^{2k}$. Alors $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\|P_n\|_c = \sup\limits_{0\leq k\leq n} \mathtt{C}_n^k \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$ qui tend vers $+\infty$, ce qui est impossible.

(b) Supposons de même qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, $\|P\|_\infty \leq M\|P\|_c$. Prenons $P_n = 1 + X + ... + X^n$. Alors $\|P_n\|_c = 1$ et $\|P_n\|_\infty = n + 1 \leq M$, ce qui est impossible pour n grand.

3. (a) Il est clair que l'application φ est linéaire. De plus, pour tout $P \in E$, on a :

$$|\varphi(P)| \leq \int_{-1}^{1} |P(t)|\mathrm{d}t \leq 2\|P\|_\infty.$$

Ceci montre que l'application $\varphi : (E, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue.

(b) Prenons la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_n = X^n$. On a $\|P_n\|_c = 1$ et

$$\varphi(P_n) = \int_{-1}^{1} t^n \mathrm{d}t = \frac{1 + (-1)^n}{n + 1}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ce qui montre la non-continuité de $\varphi : (E, \|.\|_c) \to \mathbb{R}$.

4. (a) Il est clair que ψ est linéaire. Si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in E$, alors $\psi(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} X^k$. Donc

$$\|\psi(P)\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_k}{2^k}\right| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| = \|P\|_c.$$

Donc ψ est continue sur $(E, \|.\|_c)$.

(b) L'application définie sur E par : $\chi : P \mapsto P(2X)$ vérifie :

$$\forall P \in E, \;\; \psi \circ \chi(P) = \chi \circ \psi(P) = P.$$

Donc ψ est inversible et $\psi^{-1} = \chi$.

(c) Pour la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_n = X^n$, on a : $\|P_n\|_c = 1$ et $\|\psi^{-1}(P_n)\| = 2^n$ tend vers l'infini, donc ψ^{-1} n'est pas bornée sur la boule unité, donc elle n'est pas continue sur $(E, \|.\|_c)$.

B. Restriction à la dimension finie

1. (a) E_d est de dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes. En particulier $\|.\|_c$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in E_d$, on a :

$$\forall t \in [-1, 1], \;\; |P(t)| \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k||t|^k \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k| \leq (d + 1)\|P\|_c.$$

Donc $\|P\|_c \leq (d + 1)\|P\|_\infty$.
Pour $P_d = 1 + X + ... + X^d$, on a $\|P\|_c = 1$ et $\|P_d\|_\infty = d + 1$. Donc $M = d + 1$.

2. (a) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété est vraie pour $n = 0$, supposons qu'elle est vraie à l'ordre n. D'après la relation de récurrence définissant la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\deg T_{n+2} = \deg(XT_{n+1}) = 1 + \deg T_{n+1} = n + 1.$$

De plus, on a :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \;\; T_{n+2}(\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n + 1)\theta - \cos n\theta = \cos(n + 2)\theta.$$

On conclut donc par le principe de récurrence.

(b) L'application $\theta \mapsto \cos\theta$ est une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,2\pi]$, donc on peut écrire :

$$\|T_n\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |T(t)| = \sup_{t\in[0,\pi]} |T(\cos\theta)| = \sup_{\theta\in[0,\pi]} |\cos n\theta| = 1.$$

$(T_0, T_1, ..., T_d)$ est une famille de $d+1$ polynômes non nuls échelonnée en degré de E_d, donc est une base de E_d. Ainsi pour tout $P \in E_d$, il existe un unique $(a_0, a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k T_k$.

(c) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos(p+q)\theta \mathrm{d}\theta + \int_0^\pi \cos(p-q)\theta \mathrm{d}\theta\right),$$

d'où :
- si $p \neq q$, $I_{p,q} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)}{p+q}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin(p-q)}{p-q}\right]_0^\pi = 0$,
- si $p = q = 0$, $I_{p,q} = I_{0,0} = \pi$,
- si $p = q \neq 0$, $I_{p,q} = \frac{\pi}{2}$.

On a $P(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{d} a_k T_k(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cos k\theta$. Donc

$$\int_0^\pi P(\cos\theta)\cos p\theta \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^\pi \cos k\theta \cos p\theta \mathrm{d}\theta = a_p \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $a_p = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi P(\cos\theta)\cos p\theta \mathrm{d}\theta$, et ceci pour $p \in [\![1,d]\!]$.

De même, $\int_0^p P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^\pi \cos k\theta \mathrm{d}\theta = a_0\pi$, d'où :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(d) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\left|\int_0^\pi P(\cos\theta)\cos p\theta \mathrm{d}\theta\right|^2 \leq \int_0^\pi P^2(\cos\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^\pi \cos^2 k\theta \mathrm{d}\theta \leq \pi\int_0^\pi P^2(\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Or $\int_0^\pi P^2(\cos\theta)\mathrm{d}\theta \leq \sup_{\theta\in[0,\pi]} |P^2(\cos\theta)|\pi = \pi\|P\|_\infty^2$. D'où, pour tout $k \in [1,d]$, on a :

$$|a_k| \leq \sqrt{2}\|P\|_\infty.$$

Pour $k = 0$, on a :

$$|a_0| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leq \|P\|_\infty \leq \sqrt{2}\|P\|_\infty.$$

(e) Montrons l'inégalité en question par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. On a : $\|T_0\|_c = 1 \leq (1+\sqrt{2})^0$ et $\|T_1\|_c = 1 \leq (1+\sqrt{2})^1$.
Supposons l'inégalité est vérifie pour tout entier $i \leq k+1$. On a :

$$\begin{aligned}
\|T_{k+2}\|_c &\leq 2\|XT_{k+1}\|_c + \|T_k\| \\
&= 2\|T_{k+1}\|_c + \|T_k\| \\
&\leq 2(1+\sqrt{2})^{k+1} + (1+\sqrt{2})^k \\
&= (1+\sqrt{2})^k(1+2(1+\sqrt{2}) \\
&= (1+\sqrt{2})^{k+2}.
\end{aligned}$$

(f) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k T_k$ un polynôme de E_d. On a :

$$\begin{aligned}
\|P\|_c &= \left\|\sum_{k=0}^{d} a_k T_k\right\|_c \\
&\leq \sum_{k=0}^{d} |a_k| \|T_k\|_c \\
&\leq \sum_{k=0}^{d} \sqrt{2}\|P\|_\infty (1+\sqrt{2})^k \\
&\leq \sqrt{2}\frac{1-(1+\sqrt{2})^{d+1}}{1-(1+\sqrt{2})}\|P\|_\infty \\
&\leq \left((1+\sqrt{2})^{d+1}-1\right)\|P\|_\infty
\end{aligned}$$

• • • • • • • • • • •