Devoir surveillé $n^\circ 4$
Correction

Exercice

1. On a par hypothèse, g uniformément continue sur J, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x,y) \in J^2,\ \ |x-y| < \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f, donc pour α

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \ \forall n \geq n_0,\ \ \forall x \in I,\ \ |f(x) - f_n(x)| < \alpha$$

On a alors, pour $n \geq n_0$ et tout $x \in I$, $|g \circ f(x) - g \circ f_n(x)| < \varepsilon$. On obtient donc bien la convergence uniforme de $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $g \circ f$ sur I.

2. (a) C'est la somme de Riemann associée à la fonction φ sur $[0,1]$. Donc $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$.

(b) i. la fonction φ étant continue sur le segment $[0,1]$ elle est bornée sur ce segment. Soit $M > 0$ tel que

$$\forall t \in [0,1],\ \ |\varphi(t)| \leq M.$$

On a, pour tout $x \in [-A, A]$,

$$\frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{AM}{n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n}\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right) = 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \neq N$, on ait :

$$\left|\frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

D'où le résultat demandé.

ii. Par concavité de la fonction $\ln$ on a toujours $\ln(1+t) \leq t$. On pose $h(t) = t^2 - t + \ln(1+t)$. Cette fonction est dérivable sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et de dérivée $h'(t) = \dfrac{t(1+2t)}{1+t}$. On en déduit que la fonction est décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Comme $h(0) = 0$ on en déduit que $h(t)$ est positive sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. D'où les inégalités demandées.

iii. Soit N l'entier défini à la question i. Pour $n > N$ on a, pour $x \in [-A, A]$,

$$|u_n(x) - v_n(x)| \leq \left|\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right]\right|$$

A l'aide des questions précédentes on obtient :

$$|u_n(x) - v_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{n^2}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq \frac{A^2M^2}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A^2M^2}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n(x) - v_n(x)) = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in [-A, A]$, $|u_n(x) - v_n(x)| < \varepsilon$. La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc bien uniformément vers la fonction nulle sur $[-A, A]$.

iv. Pour tout $x \in [-A, A]$ on a :

$$|xL - u_n(x)| \leq A \left| L - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Mais $\lim_{n\to\infty} \left[L - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right] = 0$. Donc (u_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto xL$. Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - (u_n - v_n)$, on en déduit, d'après la question précédente, que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-A, A]$ vers la fonction $v : x \mapsto xL$.

3. la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur le compact $[-A, A]$ donc uniformément continue sur ce segment, ceci pour tout $A > 0$. Par une étude similaire à la précédente on peut montrer que la suite (v_n) converge uniformément vers v sur $[0, 1]$. La suite (v_n) est alors bornée pour la norme infinie et donc il existe un réel $M' > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n(x)| \leq M'$. La fonction $x \mapsto e^x$ est alors uniformément continue sur $[-M, M]$. On peut alors appliquer la première question et donc la suite $(e^{v_n})_n$ converge uniformément vers $x \mapsto e^{v(x)}$ sur $[0, 1]$. On en déduit, par le théorème d'inversion limite intégrale que I_n converge vers $\int_0^1 e^{v(x)} \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{xL} \mathrm{d}x = \frac{1}{L}\left(e^L - 1\right)$ (à condition que L soit non nulle).

Problème

I-Étude de la suite $(I_n(f)_{n\in\mathbb{N}}$

1. f étant continue sur $[0, 1]$, donc elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq M$. D'où :

$$|I_n(f)| \leq \int_0^1 t^n |f(t)| \mathrm{d}t \leq M \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$.

2. (a) Soit $\alpha \in]0, 1[$, on a :

$$\left| n \int_0^\alpha t^n f(t) \mathrm{d}t \right| \leq nM \int_0^\alpha t^n \mathrm{d}t \leq nM\alpha^{n+1}.$$

Or $\lim_{n\to\infty} n\alpha^{n+1} = 0$, car c'est le terme général d'une série convergente. D'où $\lim_{n\to\infty} n \int_0^\alpha t^n f(t) \mathrm{d}t = 0$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 1, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$t \in [\alpha, 1] \Rightarrow |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc

$$\left| n \int_\alpha^1 t^n f(t) \mathrm{d}t \right| \leq \frac{n\varepsilon}{2} \int_\alpha^1 t^n \mathrm{d}t \leq \frac{n\varepsilon}{2} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part,

$$n \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t = n \int_0^\alpha t^n f(t) \mathrm{d}t + n \int_\alpha^1 t^n f(t) \mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, i existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| n \int_0^\alpha t^n f(t) \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour $n \geq n_0$, $|nI_n(f)| = \left| n \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} nI_n(f) = 0$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 1, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$t \in [\alpha, 1] \Rightarrow |f(t) - f(1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, on a :

$$\left|(n+1)\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t - f(1)\right| = \left|(n+1)\int_0^1 t^n\left[f(t) - f(1)\right]\mathrm{d}t\right| \leq \left|(n+1)\int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t\right| + \left|(n+1)\int_\alpha^1 t^n g(t)\mathrm{d}t\right|,$$

où $g(t) = f(t) - f(1)$.

Comme dans la question précédente, on montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t - f(1) = 0$, et comme $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = f(1)$.

3. (a) Par une intégration par parties, on obtient :

$$I_n(f) = nI_{n-1}(f) - \frac{1}{e}$$

D'où

$$I_n(f) = n!I_0(f) - \frac{1}{e}(1 + n + n(n-1) + ... + n!).$$

avec $I_0(f) = \int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{e}$. D'où :

$$I_n(f) = n!\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}(1 + n + n(n-1) + ... + n!).$$

(b) la somme $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ représente la reste de la série convergente $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}$, de somme e. On a donc

$$R_n = e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}.$$

D'où :

$$nn!R_n = enI_n(f)$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} nn!R_n = e\lim\limits_{n\to\infty} nI_n(f) = ef(1) = ee^{-1} = 1$, et donc

$$R_n \sim \frac{1}{nn!}.$$

II-Étude de la série de terme général $\left[I_n(f)^2\right]$

1. On a $\lim\limits_{n\to\infty}\left[nI_n(f)^2\right] = f(1)^2$ ce qui entraine $\left[I_n(f)^2\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n^2}$. D'où, par comparaison à une série de Riemann, la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n(f)^2$.

2. Posons $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x^k$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Donc $P(e^{i\theta})e^{i\theta} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k e^{i(k+1)\theta}$. D'une part, on :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right]\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
-i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta &= -i\sum_{k=0}^{d} a_k\int_0^{\pi} e^{i(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= -i\sum_{k=0}^{d} a_k\left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^{\pi}\\
&= -i\sum_{k=0}^{d} a_k\left[\frac{e^{i(k+1)\pi}-1}{i(k+1)}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{d} a_k\left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right]\\
&= \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x + i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

3. Il est clair que $\displaystyle\int_0^1 [P(x)]^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1} [P(x)]^2\,\mathrm{d}x$ puisque $[0,1]\subset[-1,1]$ et la fonction sous signe intégral est positive. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} [P(x)]^2\,\mathrm{d}x &= -i\int_0^{\pi}\left[[P(e^{i\theta}])^2 e^{i\theta}\right]\\
&= -i\int_0^{\pi}\left[P(e^{i\theta})P(e^{i\theta})e^{i\theta}\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \left|\int_0^{\pi}\left[P(e^{i\theta})P(e^{i\theta})e^{i\theta}\right]\mathrm{d}\theta\right|\\
&\leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\\
&\leq \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

L'application $\theta\mapsto P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})$ étant paire, donc $\displaystyle\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$. D'où les inégalités demandées :

$$\int_0^1 [P(x)]^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1} [P(x)]^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

4. Soit $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une famille de nombres réels et $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a $P(x)^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k a_l x^{k+l}$ et donc

$\displaystyle\int_0^1 P(x)^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{a_k a_l}{k+l+1}$ et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k a_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k a_l \delta_{k,l} 2\pi \\ &= \pi\sum_{k=0}^{n} a_k^2\end{aligned}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. L'inégalité $0 \leq \displaystyle\int_0^1 [P(x)]^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$ s'écrit donc :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{a_k a_l}{k+l+1} \leq \pi\sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

5. L'application $(u,v) \mapsto \displaystyle\int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t$ définie un produit scalaire sur C. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions f et g s'écrit :

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t$$

et donc, pour tout $n \in_N$, on a :

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} I_k(f)t^k f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} I_k(f)^2\right|^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1\left[\sum_{k=0}^{n} I_k(f)\right]^2 \leq \pi\sum_{k=0}^{n} I_k(f)^2.$$

D'où

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} I_k(f)^2 \leq \pi\int_0^{\pi} f(t)^2\mathrm{d}t.$$

Par passage à la limite, quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_k(f)^2 \leq \pi\int_0^{\pi} f(t)^2\mathrm{d}t$$

III- Étude de la série de terme général $(-1)^n In(f)$

1. Il s'agit d'une série alternée, et comme la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n I_n(f)$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{f(t)}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k f(t) + (-1)^{n+1}\frac{t^{+1}f(t)}{1+t}$$
et donc
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} + R_n$$
où
$$R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}.$$
La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t}$ étant continues sur $[0,1]$, donc elle bornée. D'où :
$$|R_n| \leq N \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{N}{n+1}$$
avec $N = \sup\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{|f(t)|}{1+t}$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$. Ce qui montre que la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$ converge et que
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

3. Si $f(t) = 1$, on trouve :
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2).$$

4. Si $f(t) = \sqrt{t}$, on trouve
$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{1+t}$$
avec $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+3}$ et
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{1+t} &= 2\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\left(1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\\ &= 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$
Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+3} = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ ou encore
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

IV-Etude de la série de terme général $I_n(f)$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1[$, on a :
$$|t^n g(t)| \leq |g(t)|$$
donc la fonction $t \mapsto t^n g(t)$ est absolument intégrable sur $[0,1[$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n(g) = \lim_{x\to 1} \int_0^x t^n g(t)\mathrm{d}t,$$

donc $\lim_{x\to 1} \int_x^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$. Donc, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\left| \int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et α comme dans la question précédente, on a :

$$I_n(g) = \int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 t^n g(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}.$$

g étant continue sur $[0,\alpha]$, donc elle est bornée sur cet intervalle, d'où :

$$\left| \int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sup_{t\in[0,\alpha]} |g(t)| \int_0^\alpha t^n \mathrm{d}t = \sup_{t\in[0,\alpha]} |g(t)| \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t = 0$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$|I_n(g)| \leq \varepsilon.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} I_n(g) = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1[$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} I_k(f) = \int_0^1 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1-t} + R_n$$

où

$$R_n = -\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}.$$

Posons $g(t) = \dfrac{f(t)}{1-t}$, on a g est absolument intégarble sur $[0,1[$, donc $\lim_{n\to\infty} R_n = -\lim_{n\to\infty} I_{n+1}(g) = 0$, ce qui montre que la série de terme général $I_n(f)$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t.$$

3. Supposons que la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n(f)$ est convergente, donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} I_n(f) \leq M.$$

Posons $g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k f(t)$. Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \leq M.$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $t\mapsto \dfrac{f(t)}{1-t}$ sur $[0,x]$ (x fixé). En effet, pur tout $t\in[0,x]$, on a :

$$\left|g_n(t)-\frac{f(t)}{1-t}\right| = \left|\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\right| \leq \sup_{t\in[0,x]}\left|\frac{f(t)}{1-t}\right|\int_0^x t^{n+1}\mathrm{d}t = \sup_{t\in[0,x]}\left|\frac{f(t)}{1-t}\right|\frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Le dernier terme tend vers 0 indépendamment de t, donc on peut intervertir les deux symboles limite et intégral :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{n\to\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1-t}.$$

Mais, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,1[$, on a :

$$\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \leq M.$$

Donc

$$\forall x\in[0,1[,\quad \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t \leq M$$

Comme $x\to \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ est croissante et majorée sur $[0,1[$, alors $\displaystyle\lim_{x\to1}\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ existe, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ converge. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t &= \lim_{x\to1}\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to1}\int_0^x \lim_{n\to\infty} g_n(t)\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to1}\lim_{n\to\infty}\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k f(t)\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Posons $u_k(x)=\displaystyle\int_0^x t^k f(t)\mathrm{d}t$, on a :

$$\forall x\in[0,1],\ \ 0\leq u_k(x)\leq u_k(1)$$

et la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(1)$ converge. Donc la série $\displaystyle\sum_{k\in N} u_k$ converge uniformément sur $[0,1]$, donc, comme les u_k sont continues sur $[0,1]$, alors $x\mapsto \displaystyle\sum_{n=}^{\infty} u_n(x)$ est continue, en particulier, on a :

$$\lim_{x\to1}\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to1} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f).$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1-t}.$$