Devoir surveillé $n°5$
Correction

Problème I

1. (a) La probabilité $p_{AB_n}(AB_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A et B ratent leurs cibles, et par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

(b) La probabilité $p_{AB_n}(A_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A réussisse son tir et que B rate le sien. Par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

De même, on a $p_{AB_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{9}$.

Enfin, la probabilité $p_{AB_n}(\varnothing_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A et B réussissent leurs tirs, et par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

(c) Comme $(AB_n, A_n, B_n, \varnothing_n)$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales montre que la probabilité $p(AB_{n+1})$ est égale à :

$$p_{AB_n}(AB_{n+1})p(AB_n) + p_{A_n}(AB_{n+1})p(A_n) + p_{B_n}(AB_{n+1})p(B_n) + p_{\varnothing_n}(AB_{n+1})p(\varnothing_n)$$

Comme $p(AB_{n+1}) = p_{A_n}(AB_{n+1}) = p_{B_n}(AB_{n+1}) = p_{\varnothing_n}(AB_{n+1}) = 0$, il reste donc :

$$p(AB_{n+1}) = p_{AB_n}(AB_{n+1})p(AB_n) = \frac{2}{9}p(AB_n).$$

En raisonnant de même, et en n'écrivant que les termes non nuls, on obtient :

$$\begin{aligned} p(A_{n+1}) &= p_{AB_n}(A_{n+1})p(AB_n) + p_{A_n}(A_{n+1})p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1})p(B_n) + p_{\varnothing_n}(A_{n+1})p(\varnothing_n) \\ &= \frac{4}{9}p(AB_n) + p(A_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(B_{n+1}) &= p_{AB_n}(B_{n+1})p(AB_n) + p_{A_n}(B_{n+1})p(A_n) + p_{B_n}(B_{n+1})p(B_n) + p_{\varnothing_n}(B_{n+1})p(\varnothing_n) \\ &= \frac{1}{9}p(AB_n) + p(B_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\varnothing_{n+1}) &= p_{AB_n}(\varnothing_{n+1})p(AB_n) + p_{A_n}(\varnothing_{n+1})p(A_n) + p_{B_n}(\varnothing_{n+1})p(B_n) + p_{\varnothing_n}(\varnothing_{n+1})p(\varnothing_n) \\ &= \frac{2}{9}p(AB_n) + p(\varnothing_n) \end{aligned}$$

Ces relations se traduisent matriciellement comme suit :

$$E_{n+1} = E_n \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et par récurrence facile, on a donc $E_n = E_0 M^n = (1,0,0,0)M^n$ où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) La matrice M étant triangulaire, on lit sur sa diagonale ses valeurs propres : $\dfrac{2}{9}, 1, 1, 1$.

Le sous-espace propre associé à $\dfrac{2}{9}$ est clairement la droite $\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.
Le sous-espace propre associé à 1 est l'hyperplan d'équation $7x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$.
Il est de dimension 3 en tant qu'hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

(b) On considère 3 réelsx, y, z et la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur-colonne de P est vecteur propre associé à $\dfrac{2}{9}$.
Les vecteurs-colonnes suivants ils sont associés à 1 s'ils vérifient

$$7x_1 - 4x_2 - x3\_2x_4 = 0.$$

C'est le cas si $x = 4, y = 1, z = 2$.

(c) La matrice P obtenue est inversible puisqu'elle est la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3, e_4), la base canonique de $\mathbb{R}^4$, à la base de vecteurs propres. On observe que :

$$Pe_1 = e_1, Pe_2 = 4e_1 + 7e_2, Pe_3 = e_1 + 7e_3, Pe_4 = 2e_1 + 7e_4.$$

Il en résulte que :

$$7e_2 = Pe_2 - 4Pe_1, 7e_3 = Pe_3 - Pe_1, 7e_4 = Pe_4 - 2Pe_1.$$

Puis en multipliant par P^{-1} :

$$P^{-1}e1 = e_1, 7P^{-1}e_2 = e_2 - 4e_1, 7P^{-1}e_3 = e_3 - e_1, 7P^{-1}e_4 = e_4 - 2e_1.$$

La matrice inverse de P en résulte aussitôt :

$$P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $P^{-1}MP$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la base de vecteurs propres précédente, et c'est donc la matrice suivante :

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Par définition de la convergence d'une suite de matrices dans$\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Et par continuité des opérations matricielles, on a :

$$\lim_{n_t o\infty} M^n = \lim_{n\to\infty} (PD^nP^{-1} = P\left(\lim_{n\to\infty} D^n\right)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme $E_n = (1,0,0,0)M^n$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = (1,0,0,0)\lim\limits_{n\to\infty} M^n = (0,\frac{4}{7},\frac{1}{7},\frac{2}{7})$. Donc A et B remportent le combat avec les probabilités $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{7}$, tous deux étant éliminés avec la probabilité $\frac{2}{7}$.

4. (a) On a clairement $p(T=1) = p(A_1 \cup B_1 \cup \varnothing_1)$, et ces trois événements étant deux à deux incompatibles, il vient

$$p(T=1) = p(A_1) + p(B_1) + p(\varnothing_1) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

(b) Pour tout entier naturel n, on a $AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n = (T > n)$ car :
• si l'événement $AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n$ a lieu, le combat n'est pas fini à la n-ième épreuve.
• si le combat n'est pas fini à la n-ième épreuve, A et B sont encore en présence à ce moment et l'événement $AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n$ est bien réalisé.
Il en résulte qu'on a :

$$p(T>n) = p(AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n) = p(AB_1)p_{AB_1}(AB_2)\ldots p_{AB_1\cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_{n-1}}(AB_n)$$

Il en résulte que $p(T>n) = \left(\frac{2}{9}\right)^n$ et comme $(T > n-1) = (T=n) \cup (T>n)$, on a :

$$p(T=n) = p(T>n-1) - p(T>n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{9}$.

(c) Un simple calcul faisant intervenir la série géométrique conduit à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(T=n) = \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{7}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = 1.$$

De même, un calcul calcul faisant intervenir la série-dérivée de la série géométrique donne :

$$E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} np(T=n) = \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{7}{9}\frac{1}{(1-\frac{2}{9})^2} = \frac{9}{7}.$$

Problème II

1 Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de $[0,\pi]$.

$$1 + 2\,C_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kx) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(e^{ikx} + e^{-ikx}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikx}.$$

Or $1 = e^{i0x}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-ikx} = \sum\limits_{-n}^{-1} e^{ikx}$. Donc

$$1 + 2\,C_n(x) = e^{i0x} + \sum_{1}^{n} e^{ikx} + \sum_{-n}^{-1} e^{ikx} = \sum_{-n}^{n} e^{ikx}.$$

(b) Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et z un élément de $\mathbb{C}$ différent de 1 et de 0. $\sum\limits_{-n}^{n} z^k$ est la somme de $2n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z le premier étant z^{-n}. Ainsi :

$$\sum_{-n}^{n} z^k = z^{-n}\,\frac{1-z^{2n+1}}{1-z}.$$

(c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de $]0,\pi]$. e^{ix} est un élément de $\mathbb{C}$ différent de 1 et 0 donc :

$$\begin{aligned}
1+2\,C_n(x) &= \sum_{-n}^{n} e^{ikx} = \sum_{-n}^{n}\left(e^{ix}\right)^k = \left(e^{ix}\right)^{-n}\frac{1-\left(e^{ix}\right)^{2n+1}}{1-e^{ix}} = e^{-inx}\,\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\\
&= e^{-inx}\,\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\,\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x}-e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

En divisant par 2 il vient :

$$\frac{1}{2}+C_n(x)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons :

$$\forall x\in]0,\pi],\quad f_n(x)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

f_n coïncide sur $]0,\pi]$ avec $\dfrac{1}{2}+C_n(x)$ qui est continue sur $[0,\pi]$. f_n est donc continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en 0. Ceci suffit pour obtenir la convergence de

$$J_n=\int_0^{\pi} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

De plus $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+C_n(t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

3. Les fonctions $x\mapsto\cos(ax)-1$ et $x\mapsto\sin\dfrac{x}{2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus cette dernière fonction ne s'annule pas sur $]0,\pi]$. Ainsi φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

• On a :

$$\frac{\cos(ax)-1}{\sin\frac{x}{2}}=-\frac{1-\cos(ax)}{\sin\frac{x}{2}}\underset{0}{\sim}-\frac{\frac{(ax)^2}{2}}{\frac{x}{2}}=-a^2x.$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(ax)-1}{\sin\frac{x}{2}}=0=\varphi(0)$. Ainsi φ est continue en 0.

φ est donc continue sur $[0,\pi]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

• Pour montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$, il suffit de prouver que la restriction de φ' à $]0,\pi]$ admet une limite finie en 0 (théorème du prolongement de la dérivée). On a :

$$\forall x\in]0,\pi],\quad \varphi'(x)=\frac{1}{(\sin\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos(ax)-1\right)\cos\frac{x}{2}\right].$$

En utilisant des développements limités, on peut montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0}\varphi'(x)=-a^2$. Ceci montre que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et que $\varphi'(0)=-a^2$.

4. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Une intégration par parties simple donne :

$$I_n=\int_0^{\pi}\varphi(t)\,\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t=\left[\varphi(t)\left(-\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\varphi'(t)\left(-\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t.$$

Notons que $\varphi(0)=0$ et que $\cos\big((n+\frac{1}{2})\pi\big)=0$. On obtient alors :

$$I_n=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi}\varphi'(t)\,\cos\Big((n+\frac{1}{2})t\Big)\mathrm{d}t.$$

Donc

$$|I_n|=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\int_0^{\pi}\varphi'(t)\,\cos\Big((n+\frac{1}{2})t\Big)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi}|\varphi'(t)|\mathrm{d}t.$$

Par encadrement il vient sans difficulté

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0.$$

2 Calcul de la somme d'une série

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}u_k &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos(at)\,\cos(kt)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\cos(at)\,\sum_{1}^{n}\cos(kt)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\cos(at)C_n(t)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\pi}\cos(at)\,\Big(-\frac{1}{2}+C_n(t)+\frac{1}{2}\Big)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(at)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\cos(at)\Big(C_n(t)+\frac{1}{2}\Big)\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(at)}{a}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\big(\cos(at)-1\big)\Big(C_n(t)+\frac{1}{2}\Big)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\Big(C_n(t)+\frac{1}{2}\Big)\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\sin(\pi a)}{2a}+\int_0^{\pi}\big(\cos(at)-1\big)\,\frac{\sin\Big((n+\frac{1}{2})t\Big)}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\frac{\sin\Big((n+\frac{1}{2})t\Big)}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\sin(\pi a)}{2a}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\varphi(t)\,\sin\Big(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\Big)\mathrm{d}t+J_n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{1}^{n}u_k=-\frac{\sin(\pi a)}{2a}+\frac{1}{2}I_n+J_n.$$

2. On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}I_n\Big)=0$ (d'après I.4.) et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_n=\dfrac{\pi}{2}$ (d'après I.2.). Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to\infty i}\sum_{k=1}^{n}u_k=-\frac{\sin(\pi a)}{2a}+\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent la série de terme général u_n converge et :

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(\pi a)}{2a}.$$

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^{\pi}\cos(at)\,\cos(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big(\cos(at+nt)+\cos(at-nt)\Big)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(at+nt)}{a+n}+\frac{\sin(at-nt)}{a-n}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a\pi+n\pi)}{n+a}-\frac{\sin(a\pi-n\pi)}{n-a}\right).\\
&= \frac{1}{2}\,(-1)^n\,\sin(\pi a)\,\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n-a}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,(-1)^n\,\sin(\pi a)\,\frac{(-2a)}{n^2-a^2}.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ u_n=\frac{(-1)^{n-1}a\sin(\pi a)}{n^2-a^2}.$$

4. On a :

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(\pi a)}{2a}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a\sin(\pi a)}{n^2-a^2}=\frac{\sin(\pi a)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2}.$$

En divisant par $\frac{\sin(\pi a)}{2}$ qui n'est pas nul, car a est un réel de l'intervalle $]0,1[$, il vient :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)}-\frac{1}{a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2}.$$

Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2}=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}-\frac{1}{a}.$$

3 Calcul d'une intégrale

1. La fonction $t\mapsto f(t)=\dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et vérifie $f(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^\alpha}$. Comme α est strictement supérieur à 1, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ existe et $\displaystyle\int_1^{\infty}f(t)\mathrm{d}t$ également. Finalement : $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ existe.

2. (a) Soit t un élément de $[0,1]$ et soit n un élément de $\mathbb{N}$. Remarquons que $-t^\alpha$ est différent de 1, donc on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,t^{k\alpha}+(-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}=\sum_{k=0}^{n}(-t^\alpha)^k+(-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}=\frac{1-(-t^\alpha)^{n+1}}{1-(-t^\alpha)}+\frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha}=\frac{1}{1+t^\alpha}.$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Pour tout $t\in[0,1]$, on a : $0\leq\dfrac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\leq t^{(n+1)\alpha}$.

Donc :

$$0\leq\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t\leq\int_0^1 t^{(n+1)\alpha}\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)\alpha+1}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t=0.$$

(c) En intégrant l'égalité de question 2. a. on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}&=\sum_0^n(-1)^k\int_0^1 t^{k\alpha}\mathrm{d}t+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha\mathrm{d}t}\\&=\sum_{=0}^n\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t\right)=0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_0^n\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}=G(\alpha).$$

Donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et $G(\alpha)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$.

3. (a) Dans l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ effectuons le changement de variable $u=t^{1-\alpha}$

$$(t=u^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ et } \mathrm{d}t=\frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mathrm{d}u).$$

Alors

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+t^\alpha}=\int_1^0\frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,\frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mathrm{d}u=\frac{1}{1-\alpha}\int_1^0\frac{\mathrm{d}u}{u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}+1}=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+1}.$$

D'où :

$$H(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}\,G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big).$$

Ainsi :

$$H(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}\,G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)=\frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1}+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\alpha-1}.$$

(b) On sait que $F(\alpha)=G(\alpha)+H(\alpha)$, d'où :

$$F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{n\alpha-1}-\frac{1}{n\alpha+1}\Big)\Big].$$

Il vient alors sans difficulté :

$$F(\alpha)=1+\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}.$$

4. Comme α appartient à $]1,+\infty[$ alors $\frac{1}{\alpha}$ appartient à $]0,1[$. Alors la question 4 de la partie II, donne :

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha}}{n^2-\frac{1}{\alpha^2}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}-\alpha.$$

En divisant par α on obtient :

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}=\frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}-1.$$

Alors

$$F(\alpha)=1+\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}=\frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Finalement :

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}=\frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

4 Application

1. (a) En posant $t=mx$, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{m}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+m)\sqrt{t}}.$$

La fonction $t\to\frac{1}{(t+m)\sqrt{t}}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout entier naturel n l'inégalité

$$\frac{1}{(n+m+1)\sqrt{n+1}}\leq\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{(t+m)\sqrt{t}}$$

et, en sommant (ce qui est légitime, tout converge...),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m+1)\sqrt{n+1}} \leq \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+m)\sqrt{t}},$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue. Comme

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{2u\mathrm{d}u}{(u^2+1)u} = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\pi,$$

on a prouvé, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_i b_j}{i+j}$, $\|a\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|b\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\sqrt[4]{i}a_i}{\sqrt[4]{j}\sqrt{i+j}} \frac{\sqrt[4]{j}b_j}{\sqrt[4]{i}\sqrt{i+j}} \leq \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\sqrt{i}a_i}{\sqrt{j}(i+j)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\sqrt{j}a_j}{\sqrt{i}(i+j)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ensuite,

$$S_n \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{j}(i+j)}\right) a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{i}(i+j)}\right) b_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \pi\|a\|_2^2\|b\|_2^2.$$

d'après la question 1. En posant, pour tout entier naturel n non nul, $J_n = [\![1,n]\!]^2$, on vient de montrer que

$$S_n = \sum_{(i,j)\in J_n} \frac{a_i b_j}{i+j} \leq \pi\|a\|_2^2\|b\|_2^2.$$

Comme les J_n forment une suite croissante de parties finies de $(\mathbb{N}^*)^2$ dont la réunion est $(\mathbb{N}^*)^2$, cela prouve la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{a_i b_j}{i+j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ et le fait que sa somme, qui est $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$, est inférieure ou égale $\pi\|a\|_2^2\|b\|_2^2$, ce qu'il fallait prouver.

2. (a) En posant $t = mx$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)x^{\frac{1}{p}}} = m^{\frac{1}{p}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+m)t^{\frac{1}{p}}}.$$

La fonction $t \to \dfrac{1}{(t+m)t^{\frac{1}{p}}}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout entier naturel n l'inégalité

$$\frac{1}{(n+m+1)(n+1)^{\frac{1}{p}}} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{(t+m)t^{\frac{1}{p}}}$$

et, en sommant (ce qui est légitime, tout converge...),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+1)(n+1)^{\frac{1}{p}}} \leq \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+m)t^{\frac{1}{p}}},$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{p}}}{(n+m)n^{\frac{1}{p}}} \leq m^{\frac{1}{p}} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+m)t^{\frac{1}{p}}} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)x^{\frac{1}{p}}}.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{\frac{1}{p}}} &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{\frac{1}{p}}}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{\frac{1}{p}}}\\ &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{\frac{1}{p}}}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\frac{1}{t}+1)t^{1+\frac{1}{p}}}\end{aligned}$$

Comme dans la question 2. de la partie III, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{k-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t}{1+t}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{p}+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t}{1+t}\end{aligned}$$

Or $\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)-\frac{1}{p}}}{1+t}\right|\leq\int_0^1 t^{n+1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{n+2-\frac{1}{p}}$, le terme majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\int_0^1\frac{t^{\frac{-1}{p}}}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{p}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}-n}.$$

De la même façon, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{t}\right)} &= \sum_0^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{-k-1-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t+(-1)^{n+1}\int_1^{+\infty}\frac{t^{-(n+1)-1-\frac{1}{p}}}{1+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{-k-\frac{1}{p}}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{-n-\frac{1}{p}-2}}{1+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\left|(-1)^{n+1}\int_1^{+\infty}\frac{t^{-n-\frac{1}{p}-2}}{1+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t\right|\leq\int_1^{+\infty}t^{-n-\frac{1}{p}-2}=\frac{1}{n+\frac{1}{p}-1}$, le terme majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{p}}=p+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}+n}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}-n}+\frac{1}{\frac{1}{p}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}+n}=p+p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2p^2-1}=pF(p)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}},$$

d'après le résultat de la partie III.

(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $S_n=\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{a_ib_j}{i+j}$, $\|a\|_p=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|b\|_q=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n=\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\sqrt[p^2]{i}a_i}{\sqrt[p^2]{j}\sqrt{i+j}}\frac{\sqrt[q^2]{j}b_j}{\sqrt[q^2]{i}\sqrt{i+j}}\leq\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\sqrt[p]{i}a_i^p}{\sqrt[p]{j}(i+j)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\sqrt[q]{j}b_j^q}{\sqrt[q]{i}(i+j)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

par l'inégalité de Hölder. Ensuite,

$$S_n\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt[p]{i}}{\sqrt[p]{j}(i+j)}\right)a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[q]{j}}{\sqrt[q]{i}(i+j)}\right)b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\|a\|_p^p\|b\|_q^q.$$

d'après la question 1. En posant, pour tout entier naturel n non nul, $J_n = [\![1, n]\!]^2$, on vient de montrer que

$$S_n = \sum_{(i,j)\in J_n} \frac{a_i b_j}{i+j} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \|a\|_p^p \|b\|_q^q.$$

Comme les J_n forment une suite croissante de parties finies de $(\mathbb{N}^*)^2$ dont la réunion est $(\mathbb{N}^*)^2$, cela prouve la sommabilité de la famille $\left(\frac{a_i b_j}{i+j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ et le fait que sa somme, qui est $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$, est inférieure ou égale $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \|a\|_p^p \|b\|_q^q$, ce qu'il fallait prouver.

●●●●●●●●●●